

# Calcolo letterale

## Espressione letterale

Un'**espressione letterale** è un insieme di numeri e lettere legati dai simboli delle operazioni. Il **valore numerico** di un'espressione letterale è il risultato numerico che si ottiene eseguendo le operazioni indicate dallo schema di calcolo quando alle lettere si sostituiscono numeri.

*Esempio:* data l'espressione  $-8ab^2$

quando  $a = 2$  e  $b = -3$ , vale  $-8(2)(3)^2 = -8 \cdot 2 \cdot 9 = -144$ ,

quando invece  $a = -3$  e  $b = +1$ , vale  $-8(-3)(+1)^2 = +24$ .

## Monomi

**Monomio:** un'espressione letterale nella quale numeri e lettere sono legati dalla sola operazione di moltiplicazione si chiama monomio. Un monomio si dice ridotto in **forma normale** quando è scritto come prodotto di un solo fattore numerico e di potenze letterali con basi diverse. Per ridurre in forma normale un monomio occorre moltiplicare tra loro i fattori numerici e moltiplicare le potenze con la stessa base.

*Esempio:*  $-\frac{1}{2}x^2y3ax(-6)a^2$  ridotto a forma normale diventa  $+9a^3x^3y$

La parte numerica del monomio ridotto a forma normale si chiama **coefficiente**; se il coefficiente è 1 può essere omesso, se il coefficiente è 0 il monomio si dice nullo.

Il complesso delle lettere che compaiono nel monomio ridotto a forma normale si dice **parte letterale**.

### Monomi simili:

due o più monomi che hanno la parte letterale identica si dicono simili.

*Esempio:*  $5a^4bx^6y^2z^9$  è simile a  $-23a^4bx^6y^2z^9$

### Monomi opposti:

si dicono opposti due monomi che sono simili e hanno coefficienti numeri opposti.

*Esempio:*  $5a^4bx^6y^2z^9$  è opposto di  $-5a^4bx^6y^2z^9$

### Grado di un monomio:

il grado complessivo di un monomio è la somma degli esponenti della parte letterale.

*Esempio:*  $-2a^3b^4c$  ha grado  $3+4+1=8$

### Grado di un monomio rispetto ad una lettera:

il grado di un monomio rispetto ad una lettera è l'esponente con cui la lettera compare nel monomio.

*Esempio:*  $-2a^3b^4c$  ha grado 3 rispetto ad a, grado 4 rispetto a b, grado 1 rispetto a c.

## Operazioni con i Monomi

### Addizione di monomi:

la somma di due monomi simili (se non sono simili non si può fare) è un monomio simile agli addendi e avente come coefficiente la somma dei coefficienti.

*Esempio:*  $3xy^2 - 5xy^2 = -2xy^2$

### Prodotto di monomi:

il prodotto di due o più monomi (che si può fare sempre) è un monomio avente come coefficiente il prodotto dei coefficienti e come parte letterale il prodotto delle parti letterali.

*Esempio:*  $(2xy^2) \cdot (-5xy^2z^3) = -10x^2y^4z^3$

Alla parte letterale si applica la proprietà del prodotto di potenze con stessa base ( $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ ).



## Operazioni con i Polinomi

### Somma algebrica di Polinomi

Per "riduzione dei termini simili" di un polinomio si intende la somma di tutti i monomi simili presenti. La somma di due o più polinomi si esegue eliminando le parentesi che racchiudono i polinomi e sommando, poi, i polinomi simili presenti (riduzione).

L'eliminazione di una parentesi preceduta dal segno + non cambia il segno dei monomi in essa contenuti. L'eliminazione di una parentesi preceduta dal segno - porta a cambiare il segno di tutti i monomi in essa contenuti.

$$\text{Esempio: } 2x + (x - 2y) - 2(x - y) = 2x + x - 2y - 2x + y = (2 + 1 - 2) \cdot x + (-2 + 1) \cdot y = x - y$$

### Prodotto di un monomio per un polinomio

Si applica la proprietà distributiva moltiplicando il monomio per ogni termine del polinomio. Alla fine si sommano i prodotti ottenuti e si riducono i monomi eventualmente simili.

$$\text{Esempio: } 3x(x-2y) = 3x^2 - 6xy \qquad x \cdot (a + b + c) = xa + xb + xc$$

### Prodotto tra polinomi

Si applica la proprietà distributiva moltiplicando ogni termine del primo per ciascun termine del secondo. Alla fine si sommano i prodotti ottenuti e si riducono i monomi eventualmente simili.

$$\text{Esempio: } 3(x + y) \cdot (x - 2y) = 3x^2 - 6xy + 3xy - 2y^2 = 3x^2 + (-6 + 3) \cdot xy - 2y^2 = 3x^2 - 3xy - 2y^2$$

Nella moltiplicazione di più polinomi si moltiplicano i primi due polinomi tra loro (scrivendo il risultato tra parentesi) e nel passaggio successivo si moltiplica tale risultato per il terzo polinomio, ... e così via.

*Esempio:*

$$3(x + y) \cdot (x - 2y) \cdot (3 + y) = (3x^2 - 3xy - 2y^2) (3 + y) = 9x^2 - 15xy - 6y^2 + 3x^2 y - 3xy^2 - 2y^3$$

$$\text{Esempio: } (x + y) (a + b + c) = xa + xb + xc + ya + yb + yc .$$

### Divisione di un polinomio per un monomio

Si applica la proprietà distributiva dividendo ciascun termine del polinomio per il monomio. Alla fine si addizionano i quozienti ottenuti e si riducono i monomi eventualmente simili.

$$\text{Esempio: } (6x^3 - 12x^2) : (-2x) = (6x^3) : (-2x) + (-12x^2) : (-2x) = -3x^2 + 6x$$

### Quoziente tra polinomi

La divisione tra due polinomi si può eseguire con un metodo che ricalca in parte quello della divisione tradizionale. Nei casi in cui il divisore è un binomio di primo grado si può utilizzare la Regola di Ruffini.

Un polinomio è divisibile per un altro polinomio se il risultato è un terzo polinomio e la divisione non ha resto.

## Esercizi

Affrontiamo alcuni tra i più semplici esempi di operazioni con Monomi e Polinomi che possiamo incontrare. Detti a, b, x, y, z delle lettere a cui si può attribuire valore numerico:

### Monomi

Addizione:

- 1)  $5a^4bx^6y^2z^9 + 21a^4bx^6y^2z^9$
- 2)  $6a^3bx^8y^2z^9 + 5a^3bx^8y^2z^9$
- 3)  $-5x^6y^2z^9 + 7x^6y^2z^9$
- 4)  $6a^3b + 13a^3b$

Prodotto:

- 5)  $5a^4bx^6y^2z^9 \cdot 7x^6y^2z^9$
- 6)  $9a^6b^3x^6y^5z^8 \cdot 3x^6y^2z^9$
- 7)  $6a^4bx^6y^2z^9 \cdot 2a^6b^2$
- 8)  $35a^2bx^{-5}yz^3 \cdot 7x^{-7}y^4z^{-20}$

Quoziente:

- 9)  $14a^4bx^6y^2z^9 / 7x^6y^2z^9$
- 10)  $9a^6b^3x^6y^5z^8 / 3x^6y^2z^9$
- 11)  $6a^4bx^6y^2z^9 / 2a^6b^2$
- 12)  $35a^2bx^{-5}yz^3 / 7x^{-7}y^4z^{-20}$
- 13)  $7x^6y^2z^9 / 14a^4bx^6y^2z^9$
- 14)  $9x^6y^2z^9 / 3a^6b^3x^6y^5z^8$
- 15)  $6a^6b^2 / 2a^4bx^6y^2z^9$
- 16)  $35x^{-7}y^4z^{-20} / 7a^2bx^{-5}yz^3$

Potenza:

- 17)  $(3a^4bx^6y^2z^9)^2$
- 18)  $(4a^6b^3x^6y^5z^8)^3$
- 19)  $(2a^4bx^6y^2z^9)^4$
- 20)  $(5a^2bx^{-5}yz^3)^5$
- 21)  $(-7x^6y^2z^9)^{-2}$
- 22)  $(-9x^6y^2z^9)^{-3}$
- 23)  $(-6a^6b^2)^{-4}$
- 24)  $(-4x^{-7}y^4z^{-20})^{-5}$
- 25)  $(3a^4bx^6y^2z^9)^{-2}$
- 26)  $(4a^6b^3x^6y^5z^8)^{-3}$
- 27)  $(2a^4bx^6y^2z^9)^{-4}$
- 28)  $(5a^2bx^{-5}yz^3)^{-5}$
- 29)  $(-7x^6y^2z^9)^2$
- 30)  $(-9x^6y^2z^9)^3$
- 31)  $(-6a^6b^2)^4$
- 32)  $(-4x^{-7}y^4z^{-20})^5$

## Polinomi

Addizione:

$$33) 5a^4bx^6y^2z^9 + 21a^4bx^6y^2z^9$$

$$34) 6a^3bx^8y^2z^9 + 5a^3bx^8y^2z^9$$

$$35) -5x^6y^2z^9 + 7x^6y^2z^9$$

$$36) 6a^3b + 13a^3b$$

Prodotto Monomio . Polinomio:

$$37) 7a^4y^{-3}z^5 (5a^4bx^6y^2z^9 + 7x^6y^2z^9)$$

$$38) 7a^4y^{-3}z^5 (9a^6b^3x^6y^5z^8 + 3x^6y^2z^9)$$

$$39) 7a^4y^{-3}z^5 (6a^4bx^6y^2z^9 + 2a^6b^2)$$

$$40) 7a^4y^{-3}z^5 (35a^2bx^{-5}yz^3 + 7x^{-7}y^4z^{-20})$$

$$41) 7a^{-4}y^3z^{-5} (5a^4bx^6y^2z^9 + 7x^6y^2z^9)$$

$$42) 7a^{-4}y^3z^{-5} (9a^6b^3x^6y^5z^8 + 3x^6y^2z^9)$$

$$43) 7a^{-4}y^3z^{-5} (6a^4bx^6y^2z^9 + 2a^6b^2)$$

$$44) 7a^{-4}y^3z^{-5} (35a^2bx^{-5}yz^3 + 7x^{-7}y^4z^{-20})$$

Prodotto Polinomio . Polinomio: )

$$45) (9a^6b^3x^6y^5z^8 + 3x^6y^2z^9) (5a^4bx^6y^2z^9 + 7x^6y^2z^9)$$

$$46) (35a^2bx^{-5}yz^3 + 7x^{-7}y^4z^{-20}) (9a^6b^3x^6y^5z^8 + 3x^6y^2z^9)$$

$$47) (7a^4y^{-3}z^5 - 9a^3y^6z^8) (6a^4bx^6y^2z^9 + 2a^6b^2)$$

$$48) (7a^4y^{-3}z^5 - 9a^3y^6z^8) (35a^2bx^{-5}yz^3 + 7x^{-7}y^4z^{-20})$$

$$49) (35a^2bx^{-5}yz^3 + 7x^{-7}y^4z^{-20}) (5a^4bx^6y^2z^9 + 7x^6y^2z^9)$$

$$50) (5a^4bx^6y^2z^9 + 7x^6y^2z^9) (9a^6b^3x^6y^5z^8 + 3x^6y^2z^9)$$

$$51) (5a^4bx^6y^2z^9 + 7x^6y^2z^9) (6a^4bx^6y^2z^9 + 2a^6b^2)$$

$$52) (a^6b^3x^6y^5z^8 + 3x^6y^2z^9) (35a^2bx^{-5}yz^3 + 7x^{-7}y^4z^{-20})$$

Quoziente Polinomio/Monomio:

$$53) (5a^4bx^6y^2z^9 + 7x^6y^2z^9) / 7a^4y^{-3}z^5$$

$$54) (9a^6b^3x^6y^5z^8 + 3x^6y^2z^9) / 7a^4y^{-3}z^5$$

$$55) (6a^4bx^6y^2z^9 + 2a^6b^2) / 7a^4y^{-3}z^5$$

$$56) (35a^2bx^{-5}yz^3 + 7x^{-7}y^4z^{-20}) / 7a^4y^{-3}z^5$$

$$57) (5a^4bx^6y^2z^9 + 7x^6y^2z^9) / 7a^{-4}y^3z^{-5}$$

$$58) (9a^6b^3x^6y^5z^8 + 3x^6y^2z^9) / 7a^{-4}y^3z^{-5}$$

$$59) (6a^4bx^6y^2z^9 + 2a^6b^2) / 7a^{-4}y^3z^{-5}$$

$$60) (35a^2bx^{-5}yz^3 + 7x^{-7}y^4z^{-20}) / 7a^{-4}y^3z^{-5}$$

Risolvi ogni equazione nello spazio alla sua destra. Buon Lavoro.