Le frazioni

Il termine *frazione* deriva dal latino *fràngere*, che significa *rompere*, *dividere*, *frammentare*. Il participio passato di *fràngere* è presente in tre forme: *fràctus* (maschile), *fràcta* (femminile) e *fràctum* (neutro).
Quando noi trattiamo delle frazioni e ne diamo la descrizione in lingua italiana, usiamo comunemente il termine *fràtto*, che significa *divìso*.
Quindi una divisione del tipo:

$$a : b$$

corrisponde ad una frazione:

$$\frac{a}{b}$$

che si legge "*a fratto b*" oppure "*a su b*".
Nota: essendo b un divisore, deve essere sempre $b \neq 0$.
Il termine *a* viene detto *numeratore della frazione*.
Il termine *b* viene detto *denominatore della frazione*.
Il *tratto grafico scritto tra numeratore e denominatore* viene detto *segno di frazione*.

Tipi di frazioni

Frazioni proprie (con a < b)
Le frazioni proprie presentano il numeratore che è sempre più piccolo del denominatore.
Esempio
Si immagini di avere una torta e di dividerla in 8 parti. Si prendano poi 3 di queste parti per mangiarle.
Noi abbiamo *realmente* preso e mangiato "*3 fette su 8 disponibili*".
Rappresentiamo questo con la *frazione propria*:

$$\frac{a}{b} = \frac{3}{8}$$

Le frazioni che esprimono l'unità (con a = b)
Le frazioni che esprimono l'unità presentano il numeratore che è sempre uguale al denominatore. Si ricordi infatti che "*un numero diviso per se stesso è uguale ad uno*".
Esempio
Si immagini di avere *una torta* e di dividerla in 8 parti. Si prendano poi 8 di queste parti per mangiarle.
Noi abbiamo *realmente* preso e mangiato "*8 fette su 8 disponibili*", cioè "*tutta la torta*" e quindi "*una torta*".
Rappresentiamo questo con la frazione:

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{a} = \frac{b}{b} = \frac{8}{8} = 1$$

Frazioni improprie (con a > b)
Le frazioni improprie presentano il numeratore che è sempre più grande del denominatore.
Esempio
Si abbia una torta (realmente esistente) e di dividerla in 8 parti. Si immagini poi di voler prendere 11 di queste parti per mangiarle.
E' chiaro che 8 fette ce le possiamo prendere per mangiarle, ma le altre tre ce le dobbiamo inventare, perché non sono proprio disponibili nella realtà.

Rappresentiamo questo con la *frazione impropria*:

$$\frac{a}{b} = \frac{11}{8}$$

Confronto tra frazioni

Frazioni che hanno lo stesso denominatore
Per verificare quale delle frazioni messe a confronto sia più piccola o più grande è sufficiente confrontare tra loro i rispettivi numeratori.
Esempio
Confrontare le frazioni date e metterle nell'ordine crescente:

$$\frac{11}{8};\frac{4}{8};\frac{19}{8};\frac{21}{8};\frac{1}{8}$$

Risposta:

$$\frac{1}{8};\frac{4}{8};\frac{11}{8};\frac{19}{8};\frac{21}{8}$$

Esempio
Confrontare le frazioni date e metterle nell'ordine decrescente:

$$\frac{11}{8};\frac{4}{8};\frac{19}{8};\frac{21}{8};\frac{1}{8}$$

Risposta:

$$\frac{21}{8};\frac{19}{8};\frac{11}{8};\frac{4}{8};\frac{1}{8}$$

Frazioni che hanno diverso denominatore
Innanzi tutto si ricerca il minimo comune multiplo dei denominatori.
Poi si divide il minimo comune multiplo dei denominatori per ogni singolo denominatore e si moltiplica il valore trovato per il numeratore della frazione presa in esame.
Si ripete questa procedura per tutte le frazioni da confrontare.
Infine, come definito qui sopra, per verificare quale delle frazioni messe a confronto sia più piccola o più grande, sarà sufficiente confrontare tra loro i rispettivi numeratori delle varie frazioni così definite.
Esempio
Confrontare le frazioni date e poi metterle nell'ordine crescente:

$$\frac{21}{4};\frac{19}{6};\frac{11}{3}$$

Il minimo comune multiplo tra 4, 6 e 3 è 12.
I termini della prima frazione (numeratore e denominatore) saranno moltiplicati per 3.
I termini della seconda frazione (numeratore e denominatore) saranno moltiplicati per 2.
I termini della terza frazione (numeratore e denominatore) saranno moltiplicati per 4.
Si ottengono le seguenti frazioni:

$$\frac{21\cdot 3}{4\cdot 3};\frac{19\cdot 2}{6\cdot 2};\frac{11\cdot 4}{3\cdot 4}$$

ossia:

$$\frac{63}{12};\frac{38}{12};\frac{44}{12}$$

Tornando quindi alle corrispondenti frazioni originarie, possiamo ordinarle nell'ordine crescente:

$$\frac{19}{6} < \frac{11}{3} < \frac{21}{4}$$

Frazione apparente

In una frazione apparente, si ha che il numeratore ed il denominatore sono divisibili per uno stesso numero. Dalla semplificazione si ottiene una *frazione ridotta ai minimi termini*.

Esempi

$$\frac{30}{4} = \frac{15 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{15}{2}$$

$$\frac{52}{13} = \frac{13 \cdot 4 \cdot 1}{13 \cdot 1} = \frac{4}{1} = 4$$

Somma (o differenza) di frazioni

Frazioni hanno lo stesso denominatore

Se le frazioni hanno lo stesso denominatore, si ottiene una frazione che ha per denominatore lo stesso denominatore delle frazioni date e per numeratore la somma (o la differenza) dei numeratori delle singole frazioni.

Esempio

$$\frac{5}{7} - \frac{2}{7} + \frac{4}{7} = \frac{5 - 2 + 4}{7} = \frac{9}{7}$$

Frazioni con diverso denominatore

Se le frazioni hanno diverso denominatore, si trova innanzi tutto il minimo comune denominatore, cioè il minimo comune multiplo dei denominatori.

$$\frac{3}{4} - \frac{5}{6} + \frac{1}{8} = \frac{3 \cdot 6 - 5 \cdot 4 + 1 \cdot 3}{24} = \frac{18 - 20 + 3}{24} = \frac{1}{24}$$

Si divide quest'ultimo per il denominatore di ogni singola frazione e si moltiplica il quoziente ottenuto per il numeratore della frazione considerata.
Si ripete la procedura, trattando tutte le singole frazioni presenti.
Si calcolano i prodotti caratteristici dei singoli numeratori.
Si ottiene quindi una frazione che ha per denominatore il minimo comune multiplo dei denominatori e per numeratore la somma algebrica dei numeratori delle singole frazioni.
Si può avere anche il caso di una frazione apparente, riducibile ai minimi termini.

Moltiplicazione tra frazioni

Dalla moltiplicazione di due o più frazioni si ottiene una frazione che ha per numeratore il prodotto dei numeratori delle frazioni date e per denominatore il prodotto dei denominatori delle frazioni date.
Si può avere anche il caso di una frazione apparente, riducibile ai minimi termini.
E' opportuno però lavorare sempre con numeri piccoli e, dove ciò sia possibile, eseguire delle semplificazioni incrociate tra uno o più numeratori e uno o più denominatori.

Esempio

$$\frac{15}{7} \cdot \frac{28}{3} \cdot \frac{1}{40} = \frac{5 \cdot 3}{7} \cdot \frac{4 \cdot 7}{3} \cdot \frac{1}{5 \cdot 4 \cdot 2} = \frac{1}{2}$$

Divisione tra frazioni

La divisione tra due o più frazioni si può ricondurre ad una moltiplicazione tra frazioni, lasciando inalterata la prima frazione della serie, per poi moltiplicarla per il reciproco di ogni altra singola frazione.

Si può avere anche il caso di una frazione apparente, riducibile ai minimi termini.

E’ opportuno però lavorare sempre con numeri piccoli e, dove ciò sia possibile, eseguire delle semplificazioni incrociate tra uno o più numeratori e uno o più denominatori.

Esempio

$$\frac{15}{7} : \frac{5}{14} : \frac{4}{3} = \frac{15}{7} \cdot \frac{14}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{5 \cdot 3}{7} \cdot \frac{2 \cdot 7}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{2}$$

Calcolo con frazioni, addizioni e sottrazioni

1.	$\frac{8}{3}+\frac{7}{3}=$	$\frac{14}{9}+\frac{7}{9}=$	$2+\frac{1}{4}=$
2.	$\frac{1}{3}+2=$	$\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=$	$\frac{7}{5}-\frac{2}{5}=$
3.	$\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=$	$\frac{3}{4}-\frac{1}{2}=$	$1-\frac{1}{5}=$
4.	$\frac{6}{5}-1=$	$2-\frac{7}{6}=$	$\frac{7}{3}-\frac{1}{2}=$
5.	$\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=$	$\frac{2}{3}-\frac{2}{5}=$	$\frac{3}{2}+\frac{1}{7}=$
6.	$1+\frac{3}{5}=$	$\frac{15}{25}+\frac{7}{10}=$	$\frac{9}{12}-\frac{1}{7}=$
7.	$\frac{9}{6}-\frac{5}{6}=$	$\frac{7}{5}-\frac{2}{3}=$	$3-\frac{5}{6}=$
8.	$\frac{2}{4}-\frac{7}{49}=$	$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{5}{12}=$	$\frac{17}{4}-\frac{5}{6}+\frac{1}{2}=$
9.	$\frac{3}{2}+\frac{1}{2}+\frac{7}{2}+\frac{5}{2}=$	$\frac{7}{4}+\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=$	$\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-1-\frac{1}{4}=$
10.	$\frac{3}{2}+\frac{4}{5}-\frac{1}{4}$	$\frac{9}{10}+\frac{1}{2}-1=$	$\frac{5}{4}-\frac{6}{7}-\frac{3}{14}=$
11.	$\frac{2}{21}+\frac{3}{7}-\frac{1}{3}=$	$\frac{5}{28}+\frac{3}{14}-\frac{4}{21}=$	$\frac{5}{2}+\frac{3}{5}-\frac{1}{4}=$
12.	$\frac{3}{8}+\frac{1}{2}+4+\frac{1}{3}=$	$\frac{10}{3}-\frac{15}{18}-\frac{1}{5}=$	$\frac{13}{6}-\frac{10}{15}-\frac{3}{5}=$
13.	$\frac{2}{3}+5+\frac{1}{4}+\frac{4}{9}+\frac{7}{18}=$	$\frac{6}{7}-\frac{5}{10}-\frac{3}{21}=$	$\frac{3}{7}+\frac{4}{35}+\frac{5}{14}=$
14.	$\frac{7}{5}-\frac{49}{50}-\frac{1}{10}=$	$\frac{4}{3}-\frac{1}{2}-\frac{3}{5}=$	$\frac{4}{3}-\frac{2}{15}-\frac{3}{5}=$
15.	$\frac{5}{12}+\frac{3}{4}-\frac{1}{3}=$	$\frac{5}{4}+\frac{3}{12}+\frac{1}{3}=$	$\frac{5}{18}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=$

Calcolo con frazioni, moltiplicazioni e divisioni

1.	$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=$	$\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}=$	$\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{5}=$
2.	$\frac{1}{3}\cdot\frac{21}{5}=$	$\frac{12}{5}\cdot\frac{1}{6}=$	$\frac{55}{14}\cdot\frac{7}{33}=$
3.	$\frac{1}{2}:2=$	$\frac{1}{2}:\frac{1}{2}=$	$\frac{1}{2}:\frac{2}{3}=$
4.	$\frac{3}{4}:\frac{7}{8}=$	$\frac{3}{4}:2=$	$\frac{6}{7}:\frac{3}{14}=$
5.	$\frac{1}{2}:\frac{3}{4}=$	$\frac{3}{5}\cdot\frac{15}{3}=$	$\frac{7}{25}\cdot\frac{5}{21}=$
6.	$\frac{7}{3}:\frac{14}{3}=$	$\frac{14}{3}\cdot\frac{9}{10}=$	$\frac{5}{9}\cdot\frac{3}{10}=$
7.	$\frac{1}{3}:\frac{3}{2}=$	$\frac{3}{5}:\frac{7}{5}=$	$12:\frac{4}{5}=$
8.	$\frac{3}{4}\cdot\frac{16}{27}\cdot\frac{36}{5}=$	$35\cdot\frac{18}{7}\cdot\frac{5}{9}=$	$\frac{17}{8}\cdot\frac{3}{34}\cdot\frac{6}{21}=$
9.	$\frac{3}{4}\div\frac{9}{16}\div\frac{1}{2}=$	$18\div\frac{9}{7}=$	$\frac{20}{7}\div\frac{10}{3}=$
10.	$\frac{4}{7}\div\frac{1}{14}\div\frac{2}{5}=$	$\frac{11}{9}\cdot\frac{1}{5}\div\frac{22}{9}=$	$\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}\div 9=$
11.	$\frac{4}{3}\cdot\frac{8}{5}\cdot\frac{9}{8}=$	$\frac{2}{7}\cdot\frac{49}{4}:\frac{7}{5}=$	$\frac{7}{5}:\frac{2}{25}\cdot\frac{4}{7}=$
12.	$\frac{17}{8}\cdot\frac{3}{34}\cdot\frac{6}{12}=$	$\frac{1}{35}:\frac{18}{7}:\frac{1}{5}=$	$\frac{2}{3}:\frac{3}{2}\cdot\frac{7}{5}=$