

Istituto Tecnico - Liceo Scientifico
"G. CARAMUEL"
VIGEVANO

2013/2014

Prerequisiti per
l'area scientifico-matematica

Modulo 3
Geometria

Geometria - Enti fondamentali

Dalla realtà alla geometria

A partire dalla realtà che lo circonda l'uomo ha trovato il modo di descrivere la forma degli oggetti e ha imparato a misurarne le dimensioni, l'estensione e lo spazio occupato.

La **geometria** (dal greco antico *γεωμετρία*, composto da *γεω*, *geo* = "terra" e *μετρία*, *metria* = "misura", tradotto quindi letteralmente come *misurazione della terra*) è quella parte della scienza matematica che si occupa delle forme nel piano e nello spazio e delle loro mutue relazioni.

La geometria coincide fino al XIX secolo con la geometria euclidea. Questa definisce come concetti primitivi il punto, la retta e il piano e assume la veridicità di alcuni assiomi, gli assiomi di Euclide (it.wikipedia.org/wiki/Euclide).

Da questi assiomi vengono quindi ricavati dei teoremi anche complessi, come il teorema di Pitagora.

Mettendo assieme i "**concetti non definiti**" o enti primitivi, considerati noti a priori, con gli "**enunciati non dimostrati**", detti **assiomi** del sistema, si ottiene il fondamento di un sistema deduttivo, il "punto di partenza" da cui ricavare tutti gli altri teoremi e concetti. La geometria posa le sue fondamenta su questi due tipi fondamentali.

In generale, un assioma è una proposizione, un concetto primitivo, che viene assunto come vero e punto di partenza per dedurre tutta una serie di ragionamenti conseguenti. Di un assioma in matematica e geometria non viene data la dimostrazione.

Enti primitivi

Punto

In geometria il **punto** è un concetto primitivo.

E' un'entità priva di estensione (non ha lunghezza, superficie o volume) e può essere pensato come sola posizione.

Il punto viene contrassegnato con una lettera maiuscola dell'alfabeto.

Proprietà

- Per ogni punto nel piano passano infinite rette.
- Per due punti passa una e una sola retta.
- Per tre punti non allineati passa uno e un solo piano.
- Per tre punti non allineati passa una e una sola circonferenza.
- Una linea è un insieme infinito di punti.

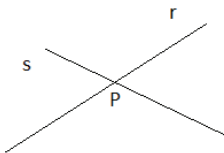
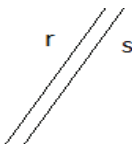
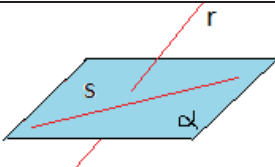
Retta

La **retta** o **linea retta** è un concetto primitivo. E' un ente geometrico immateriale senza spessore e con una sola dimensione, la lunghezza. La retta è illimitata in entrambe le direzioni, non ha un inizio e una fine.

Viene generalmente contrassegnata con una lettera minuscola dell'alfabeto latino.

Definizioni

Una retta può **giacere** (essere contenuta) nel piano o nello spazio tridimensionale.

Due rette nel piano possono essere	incidenti se si intersecano (in uno e un solo punto) $r \cap s = \{P\}$	
	parallele se non si intersecano $r \cap s = \emptyset$	
Due rette nello spazio possono essere	complanari se esiste un piano che le contiene entrambe. In questo caso, sono <u>incidenti</u> se s'intersecano e <u>parallele</u> altrimenti; sghembe se non sono contenute in un piano comune.	

Proprietà

- Per ogni punto nel piano passano infinite rette.
- Per due punti nel piano passa una e una sola retta.
- Due rette incidenti in un punto generano angoli opposti uguali.
- Per un punto nello spazio si possono tracciare un infinito numero di rette.
- Per due punti nello spazio passa una e una sola retta.
- Nello spazio, per una retta passano infiniti piani.

Una **semiretta** è una linea che divide una retta in due parti. Il punto che divide la retta e che le appartiene si chiama punto d'origine e da esso parte la semiretta, proseguendo all'infinito (ha un inizio e non ha una fine). Una semiretta è univocamente individuata dal punto di origine e un punto qualsiasi appartenente ad essa.

Segmento

Un segmento è la parte di retta limitata da due punti appartenenti ad essa, detti estremi del segmento. Un segmento ha un inizio e una fine.

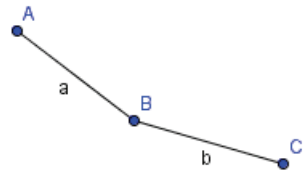
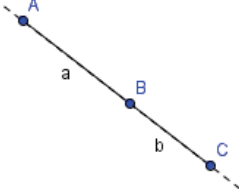
Viene generalmente contrassegnato con le lettere maiuscole dell'alfabeto latino che contraddistinguono i suoi estremi (esempio: AB).

Un segmento è la distanza minima tra due punti qualsiasi.

La lunghezza di un segmento è la misura della sua estensione lineare.

Definizioni

Due segmenti nel piano possono essere

consecutivi se hanno un estremo in comune;	
adiacenti se sono consecutivi e giacciono sulla stessa retta;	
sovrapposti se hanno un estremo in comune e il secondo estremo di uno di essi appartiene ad un punto dell'altro segmento (sono detti coincidenti se tutti i punti del primo appartengono al secondo); congruenti se sono sovrapponibili in modo che i loro estremi coincidano.	

Piano

Il **piano** è un concetto primitivo.

Un piano si indica con una lettera minuscola dell'alfabeto greco.

Proprietà

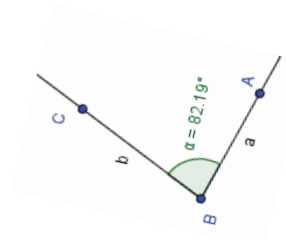
- Un piano contiene infinite rette.
- Per due punti, che individuano una retta, passano infiniti piani.
- Per tre punti non allineati passa uno e un solo piano.
- Una retta che passa per due punti appartenenti ad un piano appartiene a tale piano.

Un **semipiano** è una delle due parti in cui un piano è diviso da una retta qualsiasi, detta origine dei semipiani.

Angolo

Si dice **angolo** la parte di piano compresa tra due semirette aventi la stessa origine. Le due semirette sono dette **lati** dell'angolo e la loro origine è detta **vertice**.

Un angolo si indica con una lettera minuscola dell'alfabeto greco o con lettere maiuscole con apposto sopra il singolo $\wedge$ ($\alpha = \widehat{ABC} = \widehat{ABC}$)



Gli angoli, data la loro importanza, sono oggetto di trattazione separata.

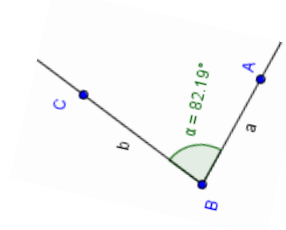
Geometria - Angoli

Angolo

Si dice **angolo** la parte di piano compresa tra due semirette aventi la stessa origine. Le due semirette sono dette **lati** dell'angolo e la loro origine è detta **vertice**.

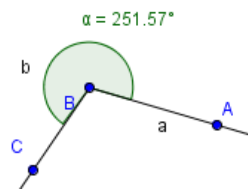
Un angolo si indica con una lettera minuscola dell'alfabeto greco o con lettere maiuscole con apposto sopra il simbolo $\wedge$ ($\alpha = \widehat{ABC} = \widehat{ABC} = 82^\circ$)

Un angolo **convesso** NON contiene il prolungamento dei suoi lati.
E' compreso tra 0° e 180° .
 $0^\circ < \alpha < 180^\circ$



Un angolo **concavo** contiene il prolungamento dei suoi lati.

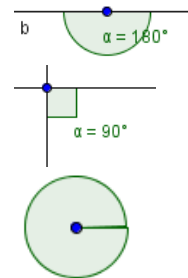
$180^\circ < \alpha < 360^\circ$



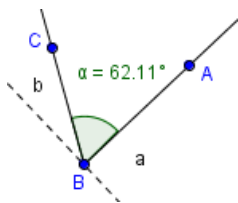
Un angolo **piatto** ha come lati due semirette opposte.

Un angolo **retto** è la metà di un angolo piatto.

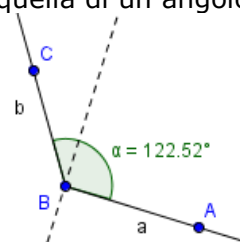
Un angolo **giro** è il doppio di un angolo piatto.



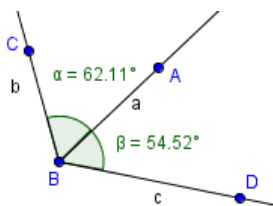
Un angolo **acuto** ha una misura minore di un angolo retto.



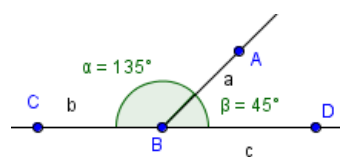
Un angolo **ottuso** ha una misura superiore a quella di un angolo retto.



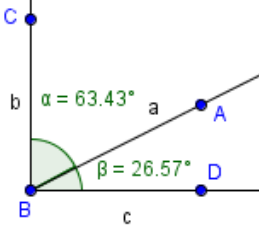
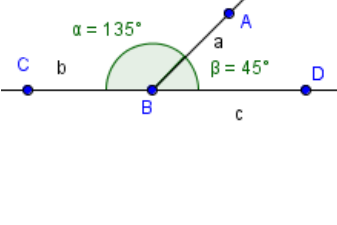
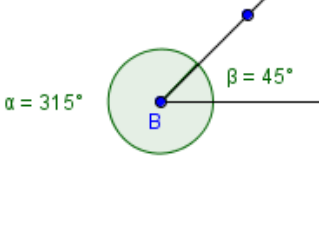
Due angoli **consecutivi** hanno in comune l'origine e un lato.



Due angoli **adiacenti** sono consecutivi e hanno i lati non adiacenti appartenenti alla stessa retta.



Angoli di complemento

Due angoli sono complementari quando la loro somma è un angolo retto.	Due angoli sono supplementari quando la loro somma è un angolo piatto.	Due angoli sono esplementari quando la loro somma è un angolo giro.
		

Due angoli sono **opposti al vertice** quando hanno i lati di uno sul prolungamento dei lati dell'altro.

La **bisettrice** di un angolo è la semiretta che divide l'angolo in due parti uguali.

Per costruire la bisettrice di un angolo dato e di origine O utilizziamo la proprietà di cui godono tutti e solo i suoi punti, cioè di essere equidistanti dai lati dell'angolo.

Puntando il compasso nell'origine O dell'angolo, con raggio a piacere, con un arco s'individuano due punti A e B sui lati dell'angolo. Tracciando due circonferenze centrate in A e in B, sempre con raggio AB, si trovano i punti d'intersezione fra le due.

Si traccia infine una retta da O passante per tale intersezione, retta che è la bisettrice dell'angolo dato.

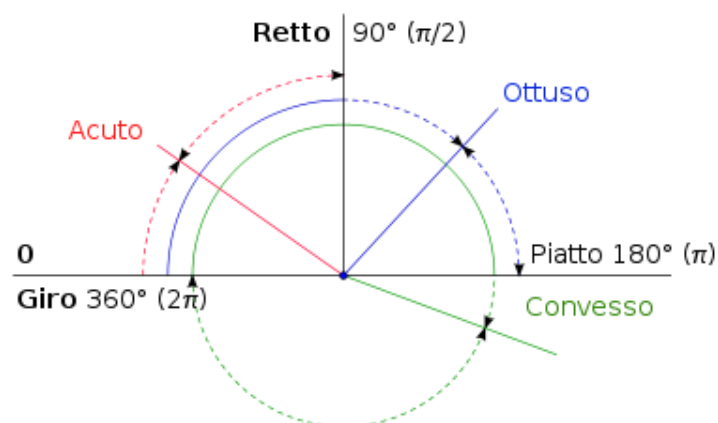
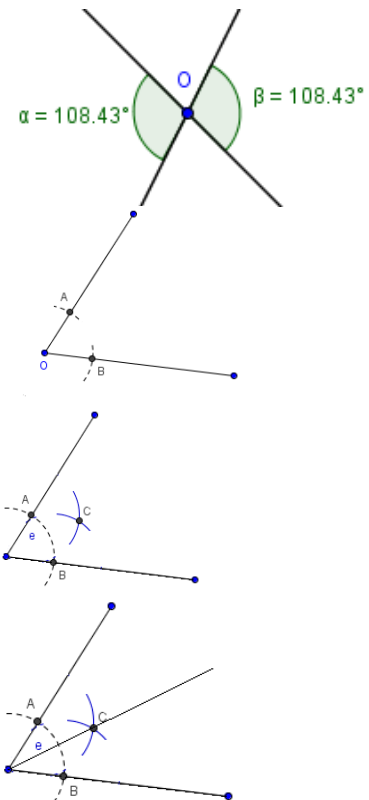
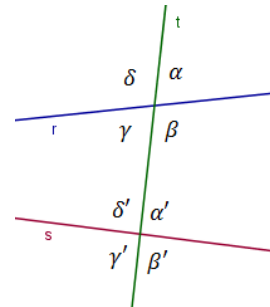


Figura tratta da Wikipedia (<http://it.wikipedia.org/wiki/Angolo>)

Angoli tagliati da una trasversale

Quando sul piano due rette qualsiasi "r" e "s" vengono tagliate da un trasversale "t", si originano otto angoli ognuno dei quali è posto in relazione con quelli ad esso **non contigui**.

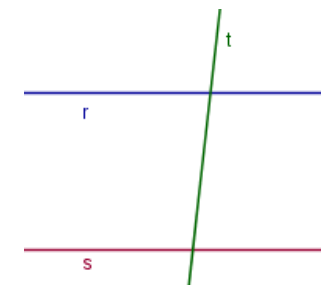
Rispetto la trasversale t, sono definiti **coniugati** due angoli non contigui disposti sullo stesso semipiano, mentre sono considerati alterni due angoli non contigui situati sui due semipiani diversi.



Rispetto alle rette r e s, invece sono definiti **esterni** due angoli non contigui avente in comune ai vertici solo uno dei semipiani originati dalla trasversale, mentre sono considerati interni due angoli non contigui aventi reciprocamente.

Sono definiti **corrispondenti** due angoli coniugati in comune ai vertici i semipiani originati dalle rette ma non reciprocamente; il che significa che solo uno degli angoli sarà contemporaneamente intersezione dei tre semi piani.

Coniugati interni	$\beta\alpha'$ $\gamma\delta'$	
Alterni interni	$\beta\delta'$ $\gamma\alpha'$	
Corrispondenti	$\alpha\alpha'$ $\beta\beta'$ $\gamma\gamma'$ $\delta\delta'$	
Nel caso in cui le due rette "r" e "s" siano parallele, gli angoli corrispondenti e gli angoli alterni saranno congruenti. Gli angoli coniugati saranno invece supplementari (somma pari a un angolo piatto).		



Misura

L'unità di misura prescelta per l'ampiezza degli angoli è il **grado sessagesimale**, pari alla novantesima parte dell'angolo retto.

Il simbolo utilizzato per il grado sessagesimale è $^{\circ}$.

I sotto multipli del grado sono il **primo** ($1^{\circ} = 60'$), il **secondo** ($1' = 60''$), i decimi di secondo e così via secondo la scala decimale (scala detta più propriamente **sessadecimale**).

La notazione usata non è quindi decimale e viene indicata con il termine di **numero complesso**, dove, come per la misura del tempo, convergono in uno stesso numero elementi diversi.

Lo strumento usato per la misura degli angoli è il **goniometro**, noto anche con il nome di rapportatore.

Un'altra unità di misura usata per l'ampiezza degli angoli è il **grado centesimale**, pari alla centesima parte dell'angolo retto, e i radianti.

Il simbolo utilizzato per il grado centesimale è $^{\circ}$.

Angolo	Sessagesimale	Centesimale	Radianti
Simbolo	$^{\circ}$	$^{\circ}$	rad
Retto	90°	100°	$\pi/2 rad$
Piatto	180°	200°	πrad
Giro	360°	400°	$2\pi rad$

Esecuzione di calcoli

Il calcolo con le misure sessagesimali e sessadecimali lascia ad un primo approccio perplessi. Operando sull'estetica dell'operazione e pensando ai gradi come ore (h), ai primi come fossero minuti (m) e ai secondi come fossero quelli utilizzati per il tempo si riesce ad operare nello stesso modo e ci si trova in una ambiente più familiare.

Trovi su UbiMath diversi esercizi, tutti risolti, con cui misurarti.

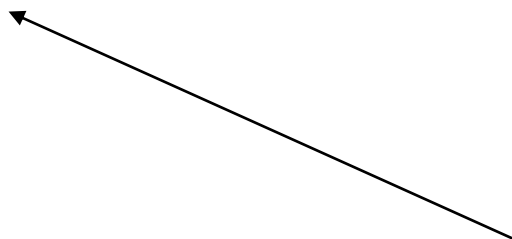
$$\begin{array}{r} 23^{\circ} 12' 32'' - \\ 12^{\circ} 10' 42'' = \\ \hline 11^{\circ} 1' 50'' \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 23^h 12^m 32^s - \\ 12^h 10^m 42^s = \\ \hline \end{array}$$

Prendo a prestito 1^m pari a 60^s si ha

$$\begin{array}{r} -1 \quad +60 \\ 23^h 12^m 32^s - \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 23^h 11^m 92^s - \\ 12^h 10^m 42^s = \\ \hline 11^h 01^m 50^s \end{array}$$



Poligoni

Un **poligono** è una linea spezzata, semplice e chiusa.

I **lati** del poligono sono segmenti che costituiscono la linea spezzata.

I **vertici** del poligono sono gli estremi dei segmenti della spezzata.

Il **perimetro** di un poligono è la misura del suo contorno e si indica con il simbolo $2p$.

Gli **angoli interni** di un poligono hanno per lati una coppia di lati consecutivi del poligono.

Gli **angoli esterni** di un poligono sono adiacenti al corrispondente angolo interno e hanno per lati un lato del poligono e il prolungamento del lato consecutivo.

La **somma degli angoli esterni** di un poligono è sempre un angolo giro (360°).

La **somma degli angoli interni** di un poligono varia secondo il numero dei lati:

$$\alpha + \beta + \gamma + \dots = (n - 2) \cdot 180^\circ$$

Un poligono è **equilatero** quando i suoi lati sono tutti congruenti, hanno cioè la stessa misura. Un poligono è **equiangolo** quando i suoi angoli sono tutti congruenti, hanno cioè la stessa ampiezza.

Un **poligono regolare** è contemporaneamente equilatero ed equiangolo.

Triangoli

Un **triangolo** è un poligono formato da tre lati.

Rappresenta la più semplice figura piana formata dal minimo numero di lati utili a chiudere una superficie piana.

Dati tre segmenti qualsiasi (a, b, c) è possibile costruire un triangolo solo se la lunghezza di ciascuno è minore della somma degli altri due.

$$\forall a, b, c \rightarrow \text{si ottiene un triangolo se} \rightarrow a < b + c; \quad b < a + c; \quad c < a + b$$

Il triangolo è una figura indeformabile ed è l'unico poligono cui è sempre circoscrivibile e in cui è sempre inscritta una circonferenza.

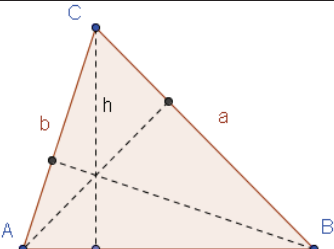
La **somma degli angoli interni** è uguale a un angolo piatto (180°).

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

Almeno due angoli interni sono acuti (non è possibile che un triangolo abbia più di un angolo interno retto o ottuso).

Un angolo retto può essere presente soltanto in un triangolo isoscele o in un triangolo scaleno, ma mai in un triangolo equilatero.

Ciascun **angolo esterno** è in un triangolo uguale alla somma dei due angoli interni non adiacenti.

	$2p = a + b + c$
	$A = \frac{1}{2}bh = \frac{b \cdot h}{2}$
	$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ $p = 2p/2$ (semiperimetro)

Date tre misure costruire un triangolo.

Dati tre segmenti, che soddisfino la regola di costruibilità dei triangoli, è possibile costruire solo un tipo di triangolo.

Si disegna un segmento AB di lunghezza pari alla prima misura nota.

Si impone al compasso un'apertura pari alla seconda misura data.

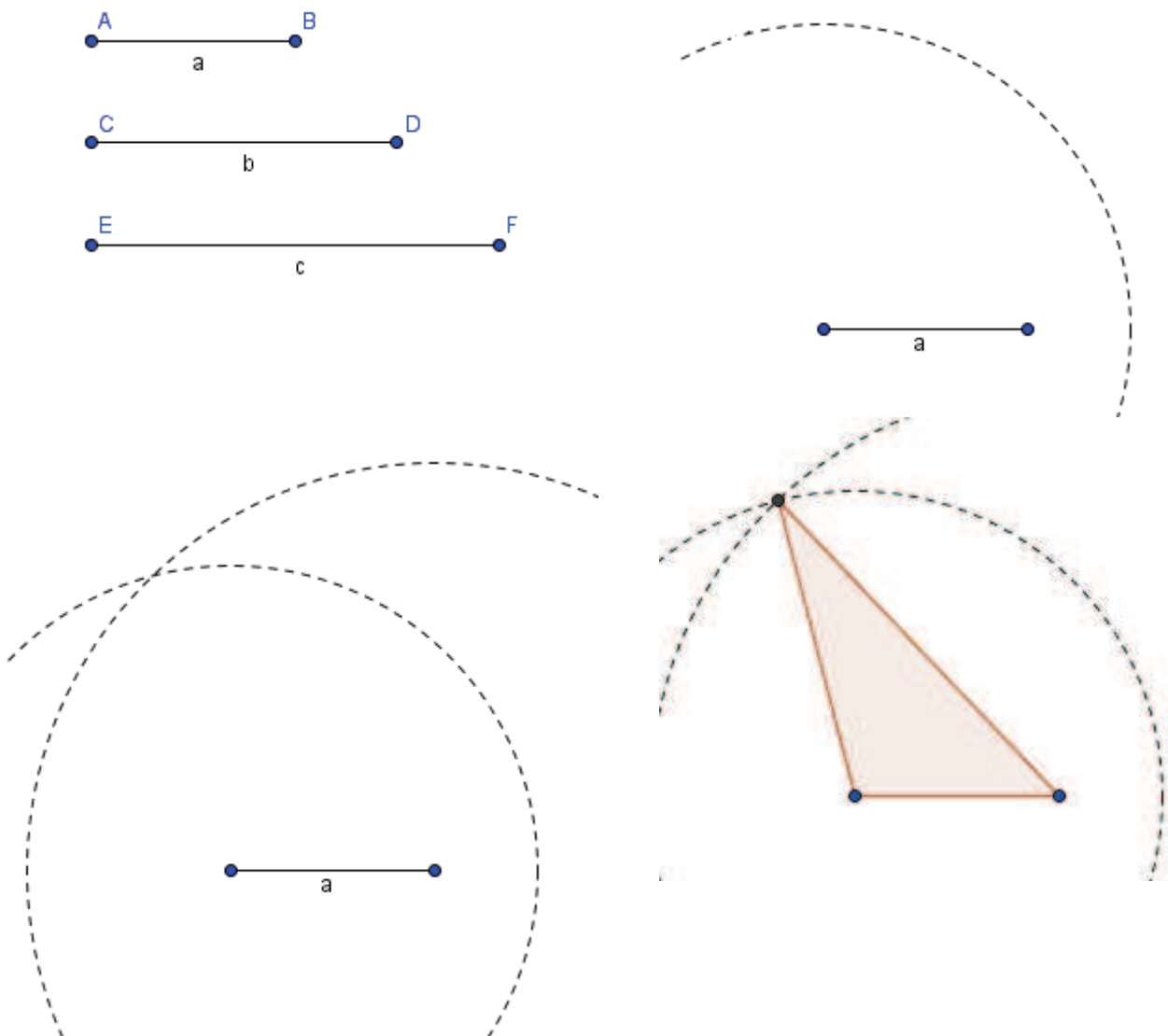
Si traccia una circonferenza, con apertura pari a quella della seconda misura nota, con centro in uno dei vertici del segmento disegnato.

Si impone al compasso un'apertura pari alla terza misura.

Si traccia una circonferenza, con apertura pari a quella della terza misura nota, con centro nell'altro vertice del segmento disegnato e in modo che tale circonferenza intersechi la prima (punto C).

Si uniscono i vertici del segmento disegnato con tale intersezione.

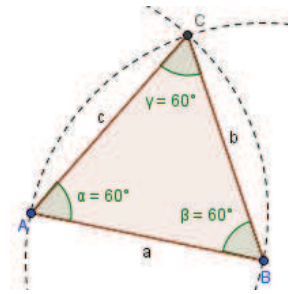
Si ottiene in questo modo il triangolo.



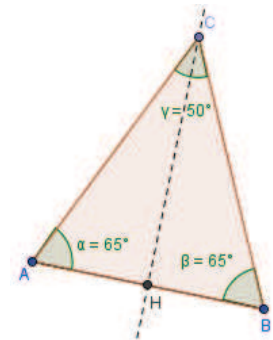
Classificazione dei triangoli

Classificazione in base ai lati

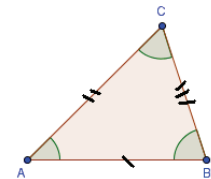
In un **triangolo equilatero** tutti i lati hanno lunghezza uguale. Un triangolo equilatero è anche equiangolo (angoli interni tutti pari a 60°).



In un **triangolo isoscele** due lati hanno lunghezza uguale. Un triangolo isoscele ha anche due angoli interni uguali (adiacenti alla base).



In un **triangolo scaleno** tutti i lati hanno lunghezze differenti. Gli angoli interni di un triangolo scaleno sono tutti differenti.



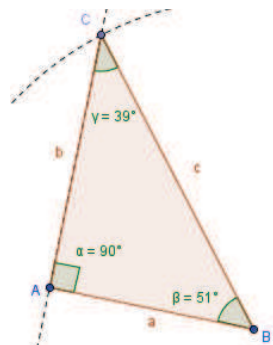
Classificazione in base ai lati

Un **triangolo rettangolo** ha un angolo interno di 90° (angolo retto). Il lato opposto all'angolo retto è detta ipotenusa ed è il lato più lungo del triangolo rettangolo. Gli altri due lati del triangolo sono detti **cateti**.

Per questo triangolo valgono il teorema di Pitagora e i teoremi di Euclide.

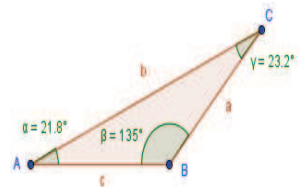
In un triangolo rettangolo il circocentro (assi) cade a metà ipotenusa.

In un triangolo rettangolo l'ortocentro (altezze) cade nel vertice dell'angolo retto.



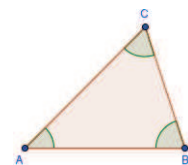
Un **triangolo ottusangolo** ha un angolo interno maggiore di 90° (angolo ottuso).

In un triangolo ottusangolo, l'ortocentro (altezze) si trova al di fuori del triangolo stesso. Sono interni l'incentro, il baricentro e il circocentro.



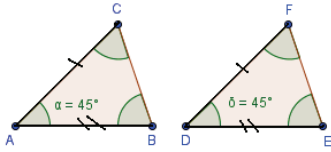
Un **triangolo acutangolo** ha tutti gli angoli interni minori di 90° (angoli acuti).

Incentro, baricentro e circocentro sono tutti e tre sempre interni a qualsiasi triangolo acutangolo.



Due triangoli sono congruenti se soddisfano almeno uno dei **criteri di congruenza**.

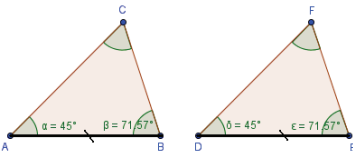
Primo criterio



Due triangoli sono congruenti se hanno due lati e l'angolo fra essi compreso ordinatamente congruenti.

$$\begin{aligned}\alpha &= \delta \\ AB &= DE \\ AC &= DF\end{aligned}$$

Secondo criterio



Due triangoli sono congruenti se hanno un lato e i due angoli a esso adiacenti ordinatamente congruenti (generalizzabile in due triangoli sono congruenti se hanno ordinatamente un lato e due angoli qualsiasi congruenti).

$$\begin{aligned}\alpha &= \delta \\ \beta &= \epsilon \\ AB &= DE\end{aligned}$$

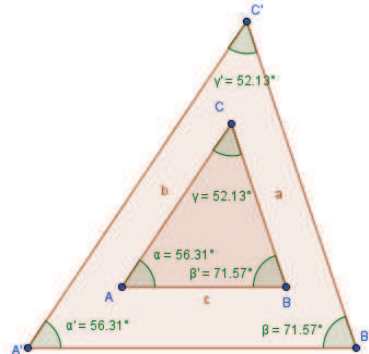
Terzo criterio

$$\begin{aligned}AB &= DE \\ BC &= EF \\ AC &= DF\end{aligned}$$

Due triangoli sono congruenti se hanno tutti i lati ordinatamente congruenti.

Due triangoli si dicono simili se soddisfano almeno uno dei **criteri di similitudine**.

Primo criterio



Due triangoli sono simili se e solo se hanno ordinatamente tre angoli congruenti.

- Due triangoli equilateri sono sempre simili.
- Due triangoli rettangoli, con un angolo acuto congruente, sono simili.
- Due triangoli isosceli, con gli angoli al vertice congruenti, sono simili.
- Questo risultato non vale per gli altri poligoni (rettangoli con lati diversi).

$$\alpha = \beta = \gamma$$

Secondo criterio

$$\begin{aligned}\alpha &= \alpha' \\ \frac{AB}{A'B'} &= \frac{AC}{A'C'}\end{aligned}$$

Due triangoli sono simili se hanno un angolo congruente e i lati che lo comprendono in proporzione.

Terzo criterio

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$$

Due triangoli sono simili se hanno i lati in proporzione.

Triangolo rettangolo

Il triangolo rettangolo è un triangolo molto particolare e studiato, se ne conoscono diverse proprietà e vi si applicano diversi teoremi.

Angoli del triangolo rettangolo

Un'applicazione della regola della somma degli angoli interni di un triangolo rettangolo che ha, quindi, un angolo retto è la seguente proprietà.

Se un triangolo ABC è rettangolo in A, allora gli angoli in B e in C sono complementari (somma 90°).

Se un triangolo, quindi, ha due angoli complementari, allora è rettangolo.

Costruzione di un triangolo rettangolo

E' possibile costruire un triangolo rettangolo conoscendo solo due delle sue dimensioni. Vi è, quindi, una relazione che lega tra di loro i lati di questo tipo di triangolo (teorema di Pitagora).

Conoscendo i due cateti

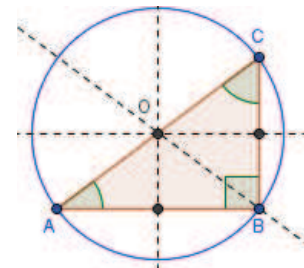
Si tracciano due segmenti perpendicolari delle dimensioni note. Il terzo lato, l'ipotenusa, si ottiene senza che occorra conoscerne la sua lunghezza.

Conoscendo un cateto e l'ipotenusa

Si traccia un segmento pari alla lunghezza del cateto noto. Si traccia la perpendicolare a tale segmento passante per un suo estremo. Si traccia un arco di cerchio di raggio pari alla lunghezza dell'ipotenusa. Il terzo lato, l'altro cateto, si ottiene senza che occorra conoscerne la lunghezza.

Cerchio circoscritto a un triangolo rettangolo

Per tutti i triangoli esiste un cerchio che passa per i suoi vertici. Si dice che il cerchio è circoscritto al triangolo o che il triangolo è inscritto nel cerchio. Il centro di tale cerchio è il punto d'incontro delle mediane del triangolo.



Se un triangolo è rettangolo, allora il centro del cerchio circoscritto cade nel punto medio dell'ipotenusa.

ne consegue che

Se un triangolo è rettangolo, allora la lunghezza della mediana relativa all'ipotenusa è pari alla metà della lunghezza dell'ipotenusa.

Proprietà delle mediane

Teorema di Pitagora

Il triangolo rettangolo è un triangolo molto particolare e studiato, se ne conoscono diverse proprietà e vi si applicano diversi teoremi.

Il teorema di Pitagora stabilisce la relazione fondamentale tra i lati di un triangolo rettangolo ed è una versione limitata a essi del teorema di Carnot.

Enunciato

In un triangolo rettangolo, l'area del quadrato costruito sull'ipotenusa è pari alla somma dell'area dei quadrati costruiti sui cateti.

Dato un triangolo rettangolo di lati a , b e c , ed indicando con c la sua ipotenusa e con a e b i suoi cateti, il teorema è espresso dall'equazione:

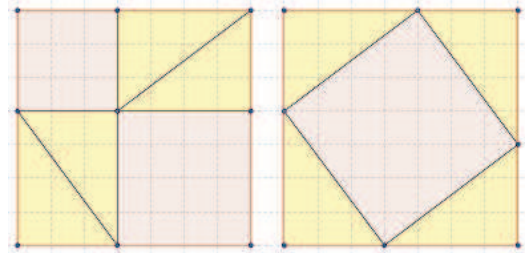
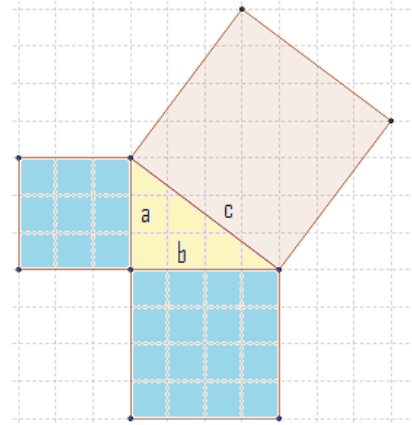
$$a^2 + b^2 = c^2$$

Da cui risolvendo per l'ipotenusa c si ha:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Da cui si ricavano i rispettivi cateti a e b :

$$a = \sqrt{c^2 - b^2} \quad b = \sqrt{c^2 - a^2}$$



Dimostrazione

Inversamente, ogni triangolo in cui i tre lati verificano questa proprietà è rettangolo.

Esempi di utilizzo di questa proprietà dei triangoli rettangoli

Noti i due cateti, ricercare l'ipotenusa

Sia dato un triangolo ABC rettangolo in A tale che AB sia 4 cm e AC sia 3 cm.

La relazione di Pitagora consente di trovare il valore dell'ipotenusa.

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25 \quad \text{da cui} \quad BC = \sqrt{25} = 5 \text{ cm}$$

Noti l'ipotenusa e un cateto, ricercare l'altro cateto

Sia dato un triangolo ABC rettangolo in A tale che AB sia 4 cm e BC sia 5 cm.

La relazione di Pitagora consente di trovare il valore dell'ipotenusa.

$$AC^2 = BC^2 - AB^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9 \quad \text{da cui} \quad AC = \sqrt{9} = 3 \text{ cm}$$

Terne pitagoriche

Dati tre numeri **interi** a , b e c verificano la relazione $a^2 + b^2 = c^2$, si dice che questi formano una **terna pitagorica**.

Le più "piccole" terne pitagoriche sono (3,4,5), (5,12,13), (6,8,10), (7,24,25), ma anche (6, 8, 10) e (10, 24, 26) sono terne pitagoriche, ottenute raddoppiando i termini delle prime due terne date.

Terne primitive e terne derivate

Una terna è **primitiva** quando è formata da numeri **primi fra loro**, il loro MCD è quindi 1 (MCD(3;4;5)=1). Esistono solo 16 terne pitagoriche primitive con il numero maggiore minore di 100.

Le terne formate da numeri non primi tra di loro sono dette terne **derivate**.

Le terne come quella formata (3, 4, 5) sono dette terne primitive e quelle come la (6, 8, 10) sono dette derivate.

Esistono delle formula per trovare tutte le terne pitagoriche?

Lo stesso Pitagora riuscì a stabilire la formula per a dispari.

$$a = 2n + 1 \qquad b = 2n^2 + 2n \qquad c = 2n^2 + 2n + 1$$

Platone riuscì a stabilire la formula per b pari.

$$a = 2n \qquad b = n^2 + 1 \qquad c = n^2 - 1$$

Euclide riporta negli Elementi la formula matematica dalla quale si possono ricavare tutte le terne pitagoriche. Posto che m e n siano due numeri interi arbitrari qualsiasi, con $m > n$.

$$a = 2mn \qquad b = m^2 - n^2 \qquad c = m^2 + n^2$$

Una conseguenza di questa formula è che le terne pitagoriche sono infinite, in quanto sono infinite le possibili scelte di m e n .

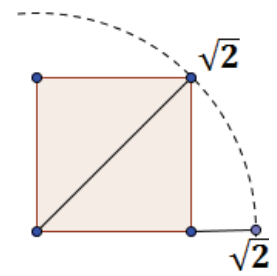
Numeri irrazionali

Il teorema di Pitagora portò alla scoperta degli incommensurabili.

In un quadrato, infatti, si può applicare il teorema di Pitagora a uno dei triangoli rettangoli isosceli formati dai suoi lati e dalla diagonale. In questo modo si scopre che la diagonale del quadrato e il suo lato sono incommensurabili: la diagonale e lato non hanno alcun sottomultiplo comune.

Prendendo un quadrato di lato unitario è possibile disegnarne la diagonale ma la sua misura ottenuta applicando il teorema di

Pitagora ($\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$) non è un numero intero e non è una frazione o il rapporto tra interi, ma è un numero irrazionale.

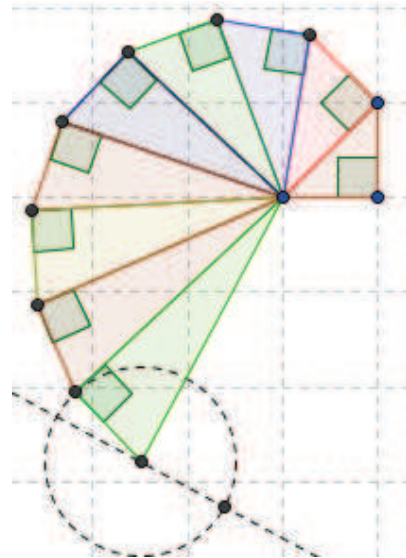


L'esistenza di grandezze incommensurabili e conseguentemente dei numeri irrazionali, contraddicendo non solo le convinzioni filosofiche dei pitagorici e mettendo anche in crisi il concetto d'infinito della filosofia greca, fu tenuta segreta. La leggenda vuole che fu Ippaso da Metaponto a divulgare il segreto. *Scriva il filosofo greco Proclo (410-485 d.C.): "I pitagorici narrano che il primo divulgatore di questa teoria [degli irrazionali] fu vittima di un naufragio; e parimenti si riferivano alla credenza secondo la quale tutto ciò che è irrazionale, completamente inesprimibile e informe, ama rimanere nascosto; e se qualche anime si rivolge ad un tale aspetto della vita, rendendolo accessibile e manifesto, viene trasportata nel mare delle origini, ed ivi flagellata dalle onde senza pace".*

Puoi costruire, utilizzando un'applicazione del ripetuta del teorema di Pitagora, la figura detta spirale della radice quadrata, figura che crea le radici quadrate successive di 1, 2, 3, 4, 5 e così via.

Disegna un triangolo rettangolo isoscele con i cateti lunghi 1 unità e, in successione, gli altri triangoli rettangoli aventi ciascuno il cateto minore lungo sempre 1 unità e il cateto maggiore coincidente con l'ipotenusa del triangolo precedente.

In questo modo l'ipotenusa del primo triangolo misura $\sqrt{2}$, l'ipotenusa del secondo triangolo misura $\sqrt{3}$, del terzo $\sqrt{4}$, del quarto $\sqrt{5}$ e così via.



Classificazione dei triangoli in base agli angoli

Un **triangolo** è **rettangolo** se il quadrato del lato maggiore è uguale alla somma dei quadrati degli altri due lati.

In un triangolo rettangolo

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Un **triangolo ottusangolo** ha un angolo interno maggiore di 90° (angolo ottuso).

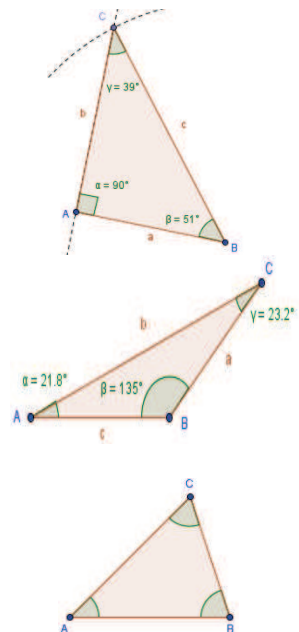
In un triangolo ottusangolo

$$c^2 > a^2 + b^2$$

Un **triangolo acutangolo** ha tutti gli angoli interni minori di 90° (angoli acuti).

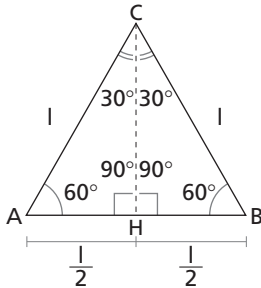
In un triangolo ottusangolo

$$c^2 < a^2 + b^2$$



TRIANGOLI CON ANGOLI DI 30°, 45° E 60°

Un triangolo equilatero ha tre lati uguali e tre angoli interni uguali (ciascuno di 60°).



In un triangolo equilatero un'altezza (cioè un segmento condotto da un vertice e perpendicolare al lato opposto) è anche mediana (interseca il lato opposto nel punto medio) e bisettrice (divide l'angolo interno in due angoli uguali, di 30°).

Nella figura a lato la lunghezza del lato è $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{CB} = l$; di conseguenza si ha

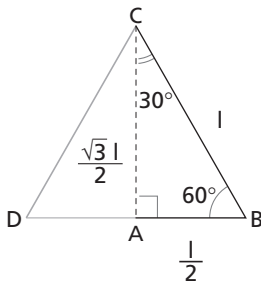
$$\overline{AH} = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{l}{2}.$$

Ciò permette di calcolare la lunghezza dell'altezza CH (e delle altre due, che sono uguali). Infatti, per il teorema di Pitagora si ha

$$\overline{CH} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{AH}^2} = \sqrt{l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \sqrt{l^2 - \frac{l^2}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}l^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}l.$$

Triangolo rettangolo con angoli di 30° e 60°

Un triangolo rettangolo con un angolo di 30° e uno di 60° è la metà di un triangolo equilatero (figura a lato). Se indichiamo con l la lunghezza dell'ipotenusa, valgono le seguenti proprietà:



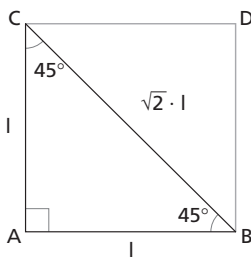
- il cateto opposto all'angolo di 30° è lungo $\frac{l}{2}$;
- il cateto opposto all'angolo di 60° è lungo $\frac{\sqrt{3}}{2}l$.

Triangolo rettangolo isoscele

Un triangolo rettangolo isoscele (cioè con i cateti uguali tra loro) è la metà di un quadrato (figura a lato) e ha due angoli di 45°. Se indichiamo con l la lunghezza dei cateti, per il teorema di Pitagora l'ipotenusa risulta:

$$\overline{BC} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2} = \sqrt{l^2 + l^2} = \sqrt{2l^2} = l\sqrt{2}.$$

Nel triangolo rettangolo isoscele l'ipotenusa è uguale a un cateto moltiplicato per $\sqrt{2}$.



DOMANDA

Un triangolo rettangolo ha l'ipotenusa BC lunga 8 m e ha l'angolo $\widehat{ABC} = 60^\circ$.

► Quanto misurano i due cateti?

ESERCIZI

TRIANGOLI CON ANGOLI DI 30°, 45° E 60°

1 Vero o falso?

- a. Un triangolo rettangolo che è la metà di un triangolo equilatero ha due angoli uguali a 30°. ☐ V ☐ F
- b. In un triangolo rettangolo isoscele, l'ipotenusa è uguale a un cateto moltiplicato per $\sqrt{2}$. ☐ V ☐ F
- c. In un triangolo rettangolo con angoli di 30° e 60°, il cateto opposto all'angolo di 30° è lungo $\frac{\sqrt{3}}{2}l$, dove l è la lunghezza dell'ipotenusa. ☐ V ☐ F

- 2 Un triangolo rettangolo ha l'ipotenusa BC lunga 10 m e ha l'angolo $\hat{A}BC = 30^\circ$.

► Quanto misurano i due cateti?

[$\overline{AC} = 5,0$ m; $\overline{AB} = 8,7$ m]

- 3 La diagonale di un quadrato vale 8,5 cm.

► Quanto misura il lato del quadrato?

[6,0 cm]

- 4 Dividi a metà un triangolo equilatero con il lato di 13 cm. Traccia l'altezza relativa all'ipotenusa di uno dei due triangoli rettangoli ottenuti.

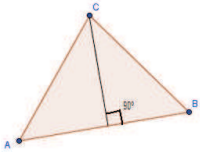
► Calcola la lunghezza dell'altezza.

[5,6 cm]

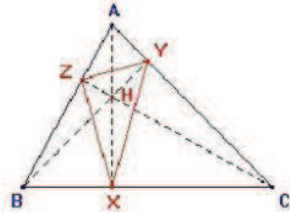
Punti notevoli di un triangolo

Particolarmente importanti in un triangolo sono i punti dove s'intersecano specifici segmenti o semirette. Questi punti sono detti **punti notevoli** di un triangolo. I punti notevoli sono utilizzabili per definire alcune caratteristiche dei triangoli e sono cinque: **ortocentro** (incontro delle altezze), **incentro** (incontro delle bisettrici), **baricentro** (incontro delle mediane), **circocentro** (incontro degli assi) ed **excentro**.

Altezza



ORTOCENTRO

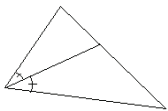


Dato dall'incrocio delle altezze.

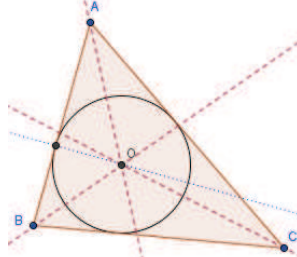
Nei triangoli ottusangoli l'ortocentro si trova al di fuori del triangolo stesso.

Cade nel vertice dell'angolo retto nel triangolo rettangolo.

Bisettrice



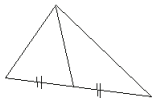
INCENTRO



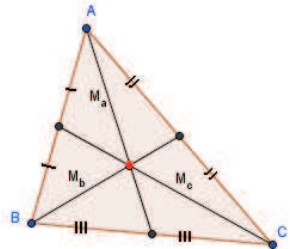
Dato dall'incrocio delle bisettrici.

E' sempre interno.
Equidistante dai lati.
Centro del cerchio inscritto.

Mediana



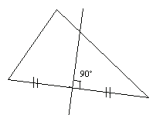
BARICENTRO



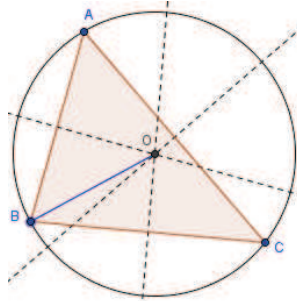
Dato dall'incrocio delle mediane.

E' sempre interno.
E' il punto di equilibrio della figura.
Divide la mediana in parti che sono una il doppio dell'altra (3 parti uguali.)
Punto di equilibrio.
Nel caso particolare del triangolo rettangolo la mediana relativa all'ipotenusa è metà dell'ipotenusa stessa.

Asse



CIRCOCENTRO



Dato dall'incrocio degli assi.

Equidistante dai vertici.
Centro del cerchio circoscritto.
Esterno nei triangoli ottusangoli.
Cade a metà ipotenusa nei triangoli rettangoli.

EXCENTRO

Punto d'intersezione delle bisettrici di due angoli esterni e della bisettrice dell'angolo interno non adiacente a essi.

Ogni triangolo ha tre excentri, che sono i centri delle tre circonferenze exinscritte (o exscritte), cioè tangenti a un lato del triangolo e ai prolungamenti degli altri due.

Altezza

Un triangolo ha tre **altezze**, ognuna relativa a un vertice.

Le altezze sono i segmenti che cadono perpendicolarmente da un vertice sino a intersecare la retta su cui giace il lato opposto a formare un angolo retto (distanza minima tra il vertice e tale retta).

Le altezze di un triangolo non sono sempre interne. Nel triangolo rettangolo due altezze corrispondono ai cateti e nel triangolo ottusangolo due altezze sono sterne ed è interna solo quella relativa al lato maggiore.

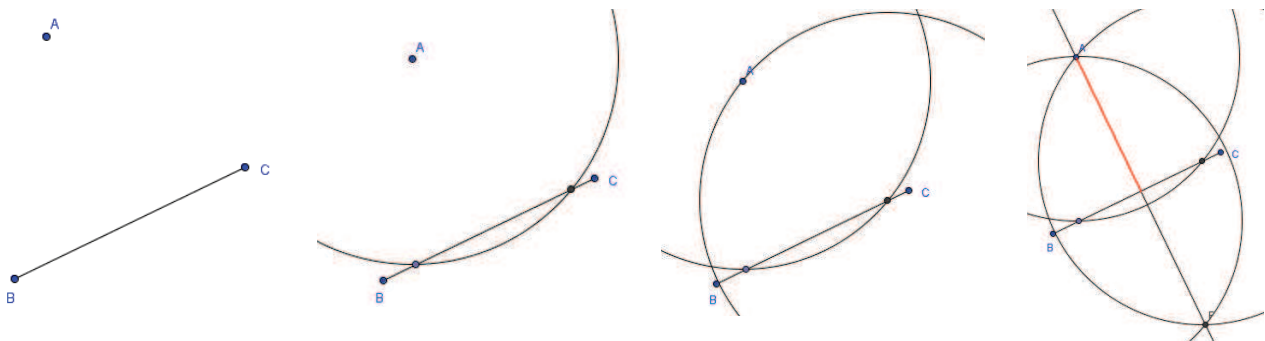
Teorema

Tutte le altezze o le relative rette di un triangolo qualsiasi s'intersecano in un unico punto, detto ORTOCENTRO.

Costruzione

Per costruire l'altezza relativa a un vertice si può utilizzare la squadra e una stecca.

Per costruire l'**altezza** di un punto da una data retta si traccia una circonferenza con il centro nel punto e arrivi a intersecare il segmento in due punti distinti. Puntando il compasso nei punti di intersezione e prendendo come raggio il punto dato si disegnano altre due circonferenze. La retta che unisce i punti d'intersezione delle due circonferenze consente di individuare il segmento di minima distanza dalla retta del punto (altezza).



Misura delle altezze

$$h_i = \frac{\sqrt{2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) - (a^4 + b^4 + c^4)}}{2l_i} \quad \text{dove con } l_i \text{ si indica un lato qualsiasi}$$

Bisettrice

La **bisettrice** di un angolo è la semiretta che divide l'angolo in due parti uguali.

Teorema

Tutte le bisettrici interne di un triangolo qualsiasi s'intersecano in un unico punto, detto **INCENTRO**, equidistante da ciascun lato del triangolo.

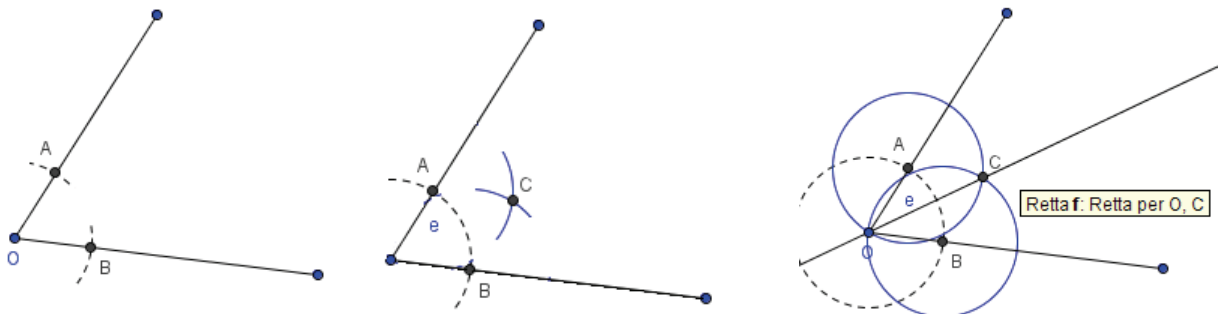
La bisettrice di un angolo interno di un triangolo divide il lato opposto in due segmenti proporzionali agli altri due lati.

Costruzione

Per costruire la bisettrice di un angolo dato e di origine O utilizziamo la proprietà di cui godono tutti e solo i suoi punti, cioè di essere equidistanti dai lati dell'angolo.

Puntando il compasso nell'origine O dell'angolo, con raggio a piacere, con un arco s'individuano due punti A e B sui lati dell'angolo. Tracciando due circonferenze centrate in A e in B , sempre con raggio AB , si trovano i punti d'intersezione fra le due.

Si traccia infine una retta da O passante per tale intersezione, retta che è la bisettrice dell'angolo dato.



Mediana

La **mediana** di un triangolo è il segmento che congiunge un vertice del triangolo con il punto medio del lato opposto.

Teoremi

Le mediane di un triangolo s'incontrano in un punto, interno al triangolo, detto **BARICENTRO**.

Il baricentro divide ciascuna mediana in due parti tali che quella avente per estremo un vertice è doppia dell'altra.

Ciascuna mediana di un triangolo divide il triangolo in due triangoli di uguale area. Di conseguenza le tre mediane di un triangolo lo scompongono in sei triangoli di uguale area.

Nel caso particolare del triangolo rettangolo la mediana relativa all'ipotenusa è metà dell'ipotenusa stessa. Il triangolo rettangolo è, infatti, sempre inscrittibile in una semicirconferenza il cui diametro è l'ipotenusa mentre la mediana coincide con un raggio.

Costruzione

Per costruire l'asse di un segmento dato si traccia una circonferenza con il centro in un estremo del segmento, e che abbia il raggio di una misura qualsiasi purché maggiore della metà del segmento dato. Mantenendo la stessa apertura del compasso, si ripete la costruzione centrando un'altra circonferenza nell'altro estremo. La retta che unisce i punti d'intersezione delle due circonferenze passa per il punto medio del segmento (vedi illustrazione per la costruzione dell'asse di un segmento).

Misura delle mediane

$$m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}$$

$$m_b = \frac{1}{2} \sqrt{2(a^2 + c^2) - b^2}$$

$$m_c = \frac{1}{2} \sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}$$

Asse di un segmento

L'**asse di un segmento** è la perpendicolare al segmento, condotta dal suo punto medio (punto del segmento equidistante dai suoi estremi).

Teoremi

L'asse di un segmento è il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti dagli estremi del segmento.

Tutti gli assi di un triangolo qualsiasi s'incontrano in uno stesso punto, detto CIRCOCENTRO. Nel caso particolare del triangolo rettangolo esso coincide con il punto medio dell'ipotenusa.

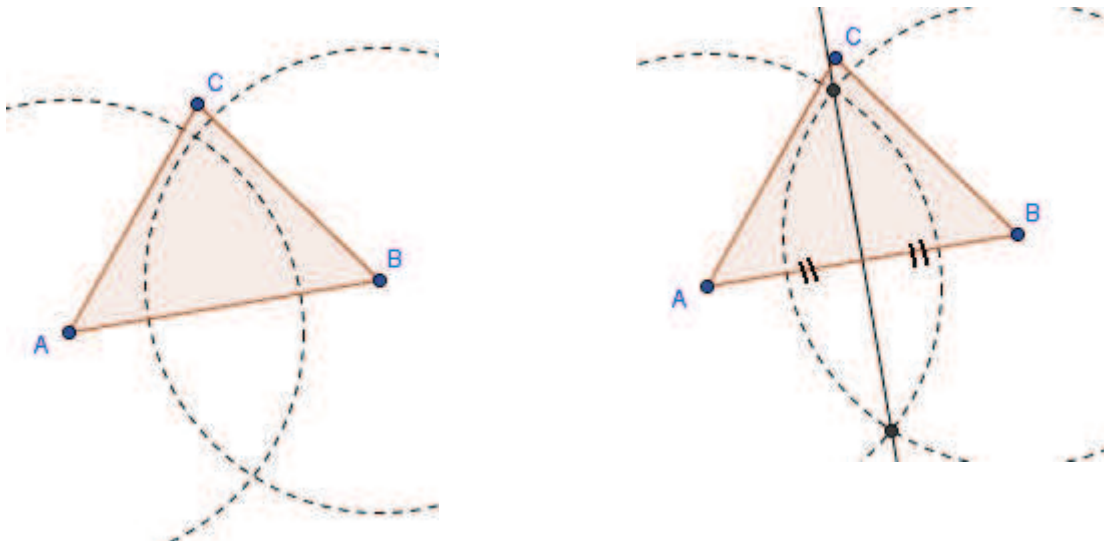
Costruzione

Per costruire l'**asse di un segmento** dato si traccia una circonferenza con il centro in un estremo del segmento, e che abbia il raggio di una misura qualsiasi purché maggiore della metà del segmento dato. Mantenendo la stessa apertura del compasso, si ripete la costruzione centrando un'altra circonferenza nell'altro estremo. La retta che unisce i punti d'intersezione delle due circonferenze è l'asse del segmento.

Tale retta passa per il punto medio del segmento.

Tale punto del segmento gode anch'esso della proprietà di essere equidistante dagli estremi del segmento.

Da tale costruzione puoi osservare che l'asse di un segmento passa per il punto medio ed è perpendicolare al segmento.



Problemi con misure angolari.

Angle Problems (Geometry).

=====

1. Siano dati due angoli adiacenti. Sapendo che uno di essi misura $48^{\circ} 28'$, calcola l'ampiezza dell'altro angolo.
2. Siano dati due angoli adiacenti. Sapendo che uno di essi misura $25^{\circ} 18'$ e $45''$, calcola l'ampiezza dell'altro angolo.
3. Un angolo supera di $23^{\circ} 20'$ il suo adiacente. Calcola l'ampiezza dei due angoli.
4. Un angolo supera di $35^{\circ} 18' 26''$ il suo adiacente. Calcola l'ampiezza dei due angoli.
5. Due angoli sono complementari. Calcola l'altro angolo sapendo che uno di essi misura $58^{\circ} 45''$.
6. Due angoli sono complementari. Calcola l'altro angolo sapendo che uno di essi misura $25^{\circ} 29' 13''$.
7. Due angoli sono supplementari. Calcola l'altro angolo sapendo che uno di essi misura $80^{\circ} 40'$.
8. Due angoli sono supplementari. Calcola l'altro angolo sapendo che uno di essi misura $125^{\circ} 30' 33''$.
9. Due angoli sono esplementari. Calcola l'altro angolo sapendo che uno di essi misura $270^{\circ} 59'$.
10. Due angoli sono esplementari. Calcola l'altro angolo sapendo che uno di essi misura $280^{\circ} 34' 59''$.
11. Siano dati due angoli sono consecutivi. Sapendo che la loro somma è di 50° e che uno di essi misura $20^{\circ} 15'$, calcola l'altro angolo.
12. Siano dati due angoli sono consecutivi. Sapendo che la loro somma è di 120° e che uno di essi misura $90^{\circ} 50' 40''$, calcola l'altro angolo.
13. Uno dei due angoli congruenti, opposti al vertice, misura 32° . Trova l'ampiezza degli altri due angoli.
14. Uno dei due angoli congruenti, opposti al vertice, misura 103° . Trova l'ampiezza degli altri due angoli.
15. Uno dei due angoli congruenti, opposti al vertice, misura $52^{\circ} 40'$. Trova l'ampiezza degli altri due angoli.
16. Uno dei due angoli congruenti, opposti al vertice, misura $120^{\circ} 31'$. Trova l'ampiezza degli altri due angoli.
17. La somma di due angoli è $80^{\circ} 20'$ e la loro differenza $4^{\circ} 4'$. Trova l'ampiezza dei due angoli.
18. La somma di due angoli è $62^{\circ} 15'$ e la loro differenza $20^{\circ} 45'$. Trova l'ampiezza dei due angoli.
19. La somma di due angoli è $27^{\circ} 30' 28''$ e la loro differenza $3^{\circ} 10' 12''$. Trova l'ampiezza dei due angoli.
20. La somma di due angoli è $66^{\circ} 46' 47''$ e la loro differenza $3^{\circ} 56' 23''$. Trova l'ampiezza dei due angoli.

21. La somma di due angoli è 69° . Trova l'ampiezza de due angoli sapendo che uno è il doppio dell'altro.
22. La somma di due angoli è $106^\circ 4' 45''$. Trova l'ampiezza de due angoli sapendo che uno è il doppio dell'altro.
23. La somma di tre angoli è un angolo retto e uno di essi misura 30° . Trova l'ampiezza degli altri due angoli sapendo che uno è il doppio dell'altro.
24. La somma di tre angoli è un angolo piatto e uno di essi misura 36° . Trova l'ampiezza degli altri due angoli sapendo che uno è il quintuplo dell'altro.
25. La somma di tre angoli è un angolo giro e uno di essi misura 128° . Trova l'ampiezza degli altri due angoli sapendo che uno è il triplo dell'altro.
26. La somma di tre angoli è un angolo retto e uno di essi misura $13^\circ 20'$. Trova l'ampiezza degli altri due angoli sapendo che uno è il quadruplo dell'altro.
27. La somma di tre angoli è 97° . Se il secondo angolo supera il primo di 3° e il terzo supera il secondo di 7° , quanto misurano i tre angoli dati?
28. La somma di tre angoli è $236^\circ 50'$. Se il secondo angolo supera il primo di $10^\circ 20'$ e il terzo supera il secondo di $8^\circ 15'$, quanto misurano i tre angoli dati?
29. La somma di tre angoli è 217° . Se il secondo angolo è il doppio del primo e il terzo è il doppio del secondo, quanto misurano i tre angoli dati?
30. La somma di tre angoli è $3^\circ 10' 48''$. Se il secondo angolo è il doppio del primo e il terzo è il triplo del primo, quanto misurano i tre angoli dati?
31. Tre angoli sono tali che la loro somma è un angolo piatto. Calcola l'ampiezza dei tre angoli sapendo che il secondo è il doppio del primo e il terzo è il triplo del primo angolo.
32. Due angoli sono tali che la loro somma è un angolo retto. Calcola l'ampiezza dei due angoli sapendo che uno è il doppio dell'altro angolo.
33. Due angoli sono tali che la loro somma è un angolo retto. Calcola l'ampiezza dei due angoli sapendo che uno è il triplo dell'altro angolo.
34. Due rette incrociandosi formano quattro angoli. Sapendo che uno di questi misura $32^\circ 40'$. Trova l'ampiezza degli altri angoli.
35. Due rette incrociandosi formano quattro angoli. Sapendo che uno di questi misura $25^\circ 15'$. Trova l'ampiezza degli altri angoli.
36. Due rette incrociandosi formano quattro angoli. Sapendo che uno di questi misura $86^\circ 12' 30''$. Trova l'ampiezza degli altri angoli.
37. Due rette incrociandosi formano quattro angoli. Sapendo che uno di questi misura $120^\circ 34' 38''$. Trova l'ampiezza degli altri angoli.

Calcoli con misure angolari.

How to operate with angle measure (Geometry).

=====

1. $10^{\circ} 20' + 8^{\circ} 15' + 8^{\circ} 15' =$
2. $12^{\circ} 32' 27'' + 35^{\circ} 18' 25'' =$
3. $32^{\circ} 45'' + 5^{\circ} 23' 11'' =$
4. $12' 45'' + 45^{\circ} 13'' =$
5. $72^{\circ} 20' 47'' + 35^{\circ} 18' 26'' =$
6. $12^{\circ} 54' 27'' + 53^{\circ} 58' 26'' =$
7. $23^{\circ} 44' 44'' + 23^{\circ} 33' 22'' =$
8. $23^{\circ} 22'' + 53' 52'' + 12^{\circ} 53' =$
9. $30' 32'' + 40^{\circ} 48'' + 10^{\circ} 51' =$
10. $89^{\circ} 56' 21'' + 32^{\circ} 48' 45'' =$
11. $97^{\circ} 23' 12'' - 17^{\circ} 12' 1'' =$
12. $47^{\circ} 35' 32'' - 17^{\circ} 14' 42'' =$
13. $45^{\circ} 50' 39'' - 27^{\circ} 19' 46'' =$
14. $40^{\circ} 25' 37'' - 18^{\circ} 29' 45'' =$
15. $90^{\circ} - 70^{\circ} 37' 45'' =$
16. $90^{\circ} - 55^{\circ} 47' 37'' =$
17. $180^{\circ} - 35^{\circ} 18' 26'' =$
18. $180^{\circ} - 80^{\circ} 37' 45'' =$
19. $360^{\circ} - 87^{\circ} 21' 54'' =$
20. $360^{\circ} - 160^{\circ} 21' 49'' =$
21. $57^{\circ} 21' - 7^{\circ} 20' 15'' =$
22. $7^{\circ} 11' 9'' \cdot 5 =$
23. $7^{\circ} 24' 11'' \cdot 4 =$
24. $3^{\circ} 50' 32'' \cdot 3 =$
25. $144^{\circ} 41' 34'' : 2 =$
26. $227^{\circ} 38' 24'' : 3 =$
27. $32^{\circ} 17' 1'' : 2 =$

Esegui le seguenti moltiplicazioni e, se necessario, porta il risultato in forma normale.

- | | | |
|-----|-------------------------|-------------------------|
| 16. | $6^h 30^m \cdot 2$ | $45^m 12^s \cdot 3$ |
| 17. | $1^h 23^m 40^s \cdot 3$ | $4^h 45^m 12^s \cdot 4$ |
| 18. | $3^h 23^m 23^s \cdot 5$ | $2^h 7^m 5^s \cdot 10$ |
| 19. | $7^h 45^m 5^s \cdot 4$ | $6^h 17^m 24^s \cdot 2$ |
| 20. | $1^h 12^m 13^s \cdot 7$ | $5^h 27^m 18^s \cdot 8$ |

Esegui le seguenti sottrazioni e, se necessario, porta il risultato in forma normale.

- | | | |
|-----|----------------------------------|----------------------------------|
| 21. | $6^h 30^m 20^s - 2^h 20^m 19^s$ | $4^h 45^m 12^s - 1^h 12^s$ |
| 22. | $2^h 30^m 10^s - 2^h 12^m 30^s$ | $12^h 5^m 12^s - 6^m 12^s$ |
| 23. | $7^h 13^m 45^s - 2^h 12^m 50^s$ | $14^h 13^m 52^s - 1^h 30^m 53^s$ |
| 24. | $16^h 30^m 10^s - 2^h 20^m 59^s$ | $23^h 5^m 12^s - 1^h 50^m$ |
| 25. | $4^h 34^m 10^s - 3^h 45^m 19^s$ | $3^h 15^m 22^s - 1^h 55^m 52^s$ |

Esegui le seguenti divisioni e, se necessario, porta il risultato in forma normale.

- | | | |
|-----|---------------------|---------------------|
| 26. | $6^h 30^m : 2$ | $45^m 12^s : 3$ |
| 27. | $1^h 33^m 15^s : 3$ | $4^h 45^m 4^s : 4$ |
| 28. | $32^m 15^s : 5$ | $7^m 30^s : 10$ |
| 29. | $2^h 16^s : 4$ | $6^h 17^m 24^s : 2$ |
| 30. | $1^m 3^s : 7$ | $5^h 27^m 15^s : 5$ |

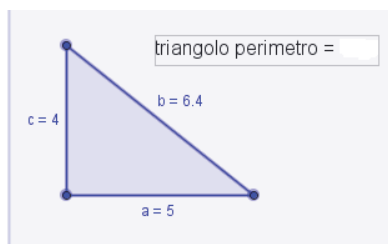
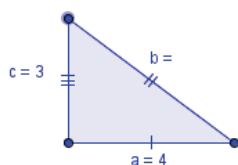
15. La somma dei cateti di un triangolo rettangolo misura 28 cm e uno è $\frac{4}{3}$ dell'altro. Determina l'area ed il perimetro della figura.

- 16.** Un triangolo rettangolo ha i cateti lunghi rispettivamente cm 60 e cm 45. Calcola l'area del triangolo, la misura del perimetro, la misura dell'altezza relativa all'ipotenusa e il perimetro di un rettangolo equivalente al triangolo, sapendo che le sue dimensioni sono una i $\frac{2}{3}$ dell'altra.
- 17.** La somma dei cateti di un triangolo rettangolo misura cm 84 e uno è i $\frac{3}{4}$ dell'altro. Determina l'area ed il perimetro della figura.
- 18.** La differenza dei cateti di un triangolo rettangolo misura 4 cm e uno è i $\frac{3}{4}$ dell'altro. Determina l'area ed il perimetro della figura.
- 19.** La somma del cateto maggiore e dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo è pari a 36 cm e l'ipotenusa è i $\frac{5}{4}$ del cateto maggiore. Determina l'area ed il perimetro della figura.
- 20.** La lunghezza di uno dei cateti di un triangolo rettangolo è data dal medio proporzionale tra 48 e 12. Sapendo che la superficie del triangolo dato misura 840 cm^2 , determina il perimetro della figura.
- 21.** Un triangolo rettangolo ha l'area di 546 cm^2 e un cateto misura 84 cm. Calcola la lunghezza del perimetro del triangolo.
- 22.** Calcola l'area e il perimetro di un triangolo rettangolo i cui cateti misurano rispettivamente 15 cm e 36 cm.
- 23.** Calcola la misura dell'ipotenusa, dell'area e del perimetro e di un triangolo ABC, rettangolo in A, la cui altezza AH relativa all'ipotenusa misura 9,6 cm e la cui mediana AM, relativa all'ipotenusa, misura 10 cm.
- 24.** Calcola la misura dell'ipotenusa, dell'area e del perimetro e di un triangolo ABC, rettangolo in C, la cui altezza CH relativa all'ipotenusa misura 9,6 cm e la cui mediana CM, relativa all'ipotenusa, misura 10 cm.
- 25.** Calcola la misura dell'area e del perimetro e di un triangolo ABC, rettangolo in C, la cui ipotenusa AB misura 112 cm e l'altezza CH e la mediana CM relative ad esse misurano rispettivamente 30 cm e 34 cm.
- 26.** L'area di un triangolo rettangolo è di 4374 cm^2 ed un suo cateto misura 108 cm. Calcola il perimetro del triangolo e l'altezza relativa all'ipotenusa.
- 27.** L'altezza AH relativa alla base di un triangolo misura 40 cm. Le proiezioni BH e CH dei due lati sulla base del triangolo misurano rispettivamente 35 cm e 75 cm. Esegui il disegno e calcola la misura del perimetro e dell'area del triangolo.
- 28.** La somma dei due cateti di un triangolo rettangolo è di 46 cm e un cateto supera l'altro di 14 cm. Calcola l'area, la misura del perimetro e l'apotema del triangolo.
- 29.** L'ipotenusa e un cateto di un triangolo rettangolo misurano rispettivamente 75 cm e 72 cm. Di quanto differisce l'area del triangolo dato e quella di un quadrato isoperimetrico a questo?
- 30.** L'area di un triangolo rettangolo è di $42,135 \text{ cm}^2$ ed un suo cateto misura 7,95 cm. Calcola il perimetro del triangolo.
- 31.** L'altezza di un rettangolo è i $\frac{4}{5}$ della diagonale che misura 40 cm. Calcola il perimetro e l'area del rettangolo dato.

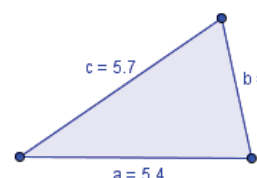
Raccolta di problemi di geometria piana sul triangolo

1. Calcola il dato mancante dati i seguenti triangoli.

triangolo perimetro = 12

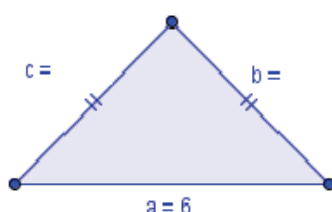


triangolo perimetro = 14.4

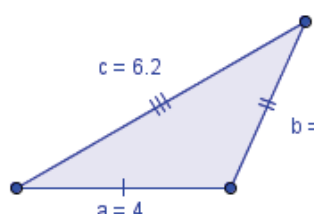


2. Calcola il dato mancante dati i seguenti triangoli.

triangolo perimetro = 14.4



triangolo perimetro = 13.6



3. Un triangolo scaleno ABC i lati misurano rispettivamente 2,3 dm, 4,1 dm e 2,7 dm. Calcola la misura del perimetro.

4. Un triangolo avente il perimetro di 67 dm un lato misura 25 dm e uno 24 dm. Calcola la misura del terzo lato.

5. Un triangolo avente il perimetro di 46 cm può avere un lato lungo 24 cm? Giustifica la tua risposta.

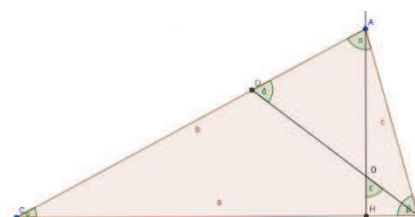
6. Un segmento misura 30 cm. Determina il segmento pari ai suoi $\frac{2}{5}$ e il segmento pari ai suoi $\frac{2}{3}$. I tre segmenti possono essere i lati di un triangolo?

7. In un triangolo un lato è di 7,8 cm, un secondo lato supera il primo di 2,4 cm e il perimetro è di 27 cm. Calcola la misura del terzo lato.

8. In un triangolo ABC disegna la mediana AM, relativa al lato CB, e la mediana CN, relativa al lato AB. Indica con O il loro punto di incontro. Calcola la lunghezza del lato AC sapendo che il perimetro è di 45 cm e che AN misura 8 cm, OM misura 3 cm e che $AO = CM$.

9. In un triangolo un primo lato misura 24 cm, il secondo lato è $\frac{2}{3}$ del primo e il terzo lato è $\frac{3}{4}$ del secondo. Calcola il perimetro del triangolo dato.

10. In un triangolo ABC disegna l'altezza AH e la bisettrice BD e il loro punto di intersezione O. Calcola le ampiezze degli angoli del triangolo ABC sapendo che gli angoli BOH e BDA misurano rispettivamente 52° e 67° .



11. In un triangolo ABC il lato AB misura 3,2 cm, il lato BC supera AB di 2,2 cm e il lato AC è inferiore di 0,9 a quest'ultimo. Calcola il perimetro del triangolo. Usando riga e compasso disegna il triangolo e stabilisci se sia rettangolo, acutangolo o ottusangolo.

12. In un triangolo un lato misura 1,5 cm e gli altri due sono rispettivamente i $\frac{4}{3}$ e $\frac{5}{3}$ del primo lato. Calcola il perimetro del triangolo dato.

13. Calcola l'ampiezza dell'angolo in A di un triangolo ABC sapendo che l'angolo in B misura 44° e che il terzo angolo è il triplo dell'angolo in B?

14. Calcola le ampiezze degli angoli acuti di un triangolo rettangolo sapendo che le loro misure differiscono di 34° .

15. In un triangolo ABC l'angolo in A è doppio dell'angolo in B. Sapendo che la somma dei due angoli è di 114° ($A^\circ + B^\circ = 114^\circ$), determina l'ampiezza di ciascuno degli angoli interni del triangolo.

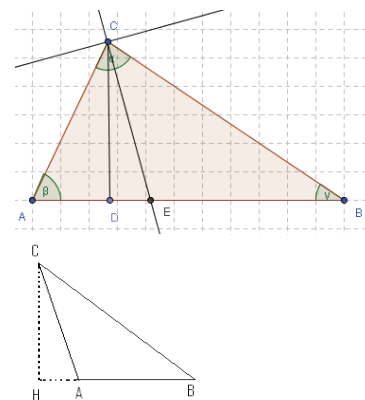
16. Calcola le ampiezze degli angoli di un triangolo ABC sapendo che gli angoli in B e in C superano l'angolo in A rispettivamente di 12° e di 33° .

17. In un triangolo ABC il perimetro misura 48 cm ed è i $\frac{32}{9}$ del lato AB, la lunghezza del lato BC supera quella del lato AC di 1,7 cm. Determina la misura dei tre lati del triangolo dato.

18. In un triangolo rettangolo ABC, rettangolo in A, il perimetro misura 14,2 cm, il lato AC misura 3 cm e l'angolo in C è il doppio dell'angolo in B. Determina l'ampiezza degli angoli interni e la misura dell'ipotenusa del triangolo dato.

19. In un triangolo ABC l'angolo in A supera l'angolo in B di 20° e l'angolo in C è il doppio dell'angolo in A. Determina l'ampiezza degli angoli interni del triangolo dato.

20. In un triangolo ABC l'angolo in A misura 64° e l'angolo in B è di 34° . Siano date l'altezza CD relativa al lato AB e il segmento CE, bisettrice relativa allo stesso lato. Determina l'ampiezza dell'angolo DCE formato dall'altezza e dalla bisettrice.



21. In un triangolo ABC l'angolo in A misura 106° e l'angolo in B è di 48° . Calcola l'ampiezza degli angoli che l'altezza BH forma con i lati BA e BC.

22. In un triangolo ABC l'angolo in A misura 60° e l'angolo in B è i $\frac{3}{4}$ dell'angolo in A. Calcola l'ampiezza del terzo angolo del triangolo. Di che triangolo si tratta?

23. Un triangolo equilatero è formato da quattro triangoli equilateri opportunamente organizzati su due file. Sapendo che il perimetro di uno dei triangoli equilateri è di 15 cm, calcola la misura di ciascun lato e del perimetro del triangolo dato.

24. Un triangolo equilatero è formato da nove triangoli equilateri opportunamente organizzati su tre file. Sapendo che il perimetro di uno dei triangoli equilateri è di 15 cm, calcola la misura di ciascun lato e del perimetro del triangolo dato.

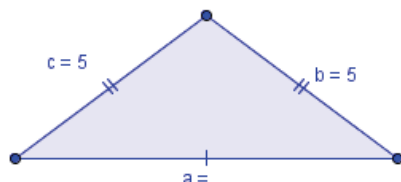


Raccolta di problemi di geometria piana sul triangolo isoscele

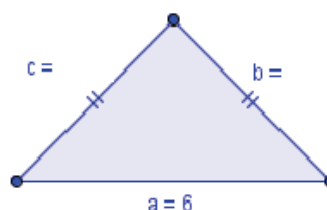


1. Calcola il dato mancante dati i seguenti triangoli.

triangolo perimetro = 18



triangolo perimetro = 14.4



2. Sia dato il triangolo isoscele ABC di base AB e lati obliqui BC e AC. I lati obliqui misurano 12 cm e la base 20 cm. Calcola la misura del perimetro del triangolo dato.

3. Sia dato il triangolo isoscele ABC di base AB e lati obliqui BC e AC. Sapendo che un lato obliquo misura 3,5 cm e la base 5,3 cm, calcola la misura del perimetro del triangolo dato.

4. In un triangolo isoscele i lati obliqui sono il doppio della base e il perimetro misura 80 dm. Calcola la misura dei lati del triangolo dato.

5. In un triangolo isoscele i lati obliqui sono il triplo della base e il perimetro misura 8,4 m. Calcola la misura dei lati del triangolo dato.

6. In un triangolo isoscele la base è $\frac{2}{5}$ del lato obliquo e il perimetro misura 312 cm. Calcola la misura dei lati del triangolo dato.

7. In un triangolo isoscele il lato obliquo misura 24 cm e la base è $\frac{5}{8}$ del lato obliquo. Calcola il perimetro del triangolo.

8. In un triangolo isoscele la base è $\frac{2}{3}$ di ciascun lato obliquo e il perimetro misura 56 cm. Calcola il perimetro di un triangolo equilatero che ha il lato pari ai $\frac{5}{7}$ del lato obliquo del triangolo isoscele dato.

9. In un triangolo isoscele la base è $\frac{1}{4}$ di ciascun lato obliquo. Calcola la misura de lato obliquo del triangolo isoscele dato sapendo che il suo perimetro è di 36,9 cm.

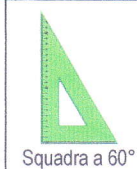
10. In un triangolo ABC i due lati AB e BC sono uguali e misurano 6 cm, l'angolo in B è di 125° e il perimetro misura 22,7 cm. Calcola la misura de lato AC e la misura dei due angoli in A e in C.

11. Un triangolo isoscele ha lo stesso perimetro di un triangolo equilatero avente il lato di 15 cm. Sapendo che nel triangolo isoscele ciascuno dei lati congruenti è $\frac{4}{7}$ della base, determina la lunghezza dei lati del triangolo isoscele.

12. Due triangoli isosceli hanno lo stesso perimetro che è di 36,9 cm. La base del primo triangolo isoscele è $\frac{1}{4}$ di ciascuno dei lati obliqui. La base del secondo triangolo isoscele è pari al doppio della base del primo. Calcolate la misura dei lati obliqui del secondo triangolo dato.

13. La base di un triangolo isoscele misura 72 cm ed è $\frac{4}{3}$ del lato obliquo. Calcolate la misura del perimetro del triangolo dato.
14. La somma dell'angolo alla base e di un angolo al vertice di un triangolo isoscele misura 133° . Determina l'ampiezza di ciascuno degli angoli interni del triangolo dato.
15. L'angolo al vertice di un triangolo isoscele misura 40° . Calcola l'ampiezza degli angoli alla base.
16. L'angolo al vertice di un triangolo isoscele misura 60° . Calcola l'ampiezza degli angoli alla base. Quale considerazione puoi fare?
17. Gli angoli alla base di un triangolo isoscele misurano 45° . Calcola l'ampiezza dell'angolo al vertice. Quale considerazione puoi fare?
18. Un angolo alla base di un triangolo isoscele misura 35° . Calcola l'ampiezza dell'angolo al vertice. Quale considerazione puoi fare?
19. L'angolo al vertice di un triangolo isoscele misura 49° . Calcola l'ampiezza degli angoli alla base. Quale considerazione puoi fare?
20. Un angolo alla base di un triangolo isoscele misura $50^\circ 30'$. Calcola l'ampiezza dell'angolo al vertice. Quale considerazione puoi fare?

Squadra da disegno (strumento)

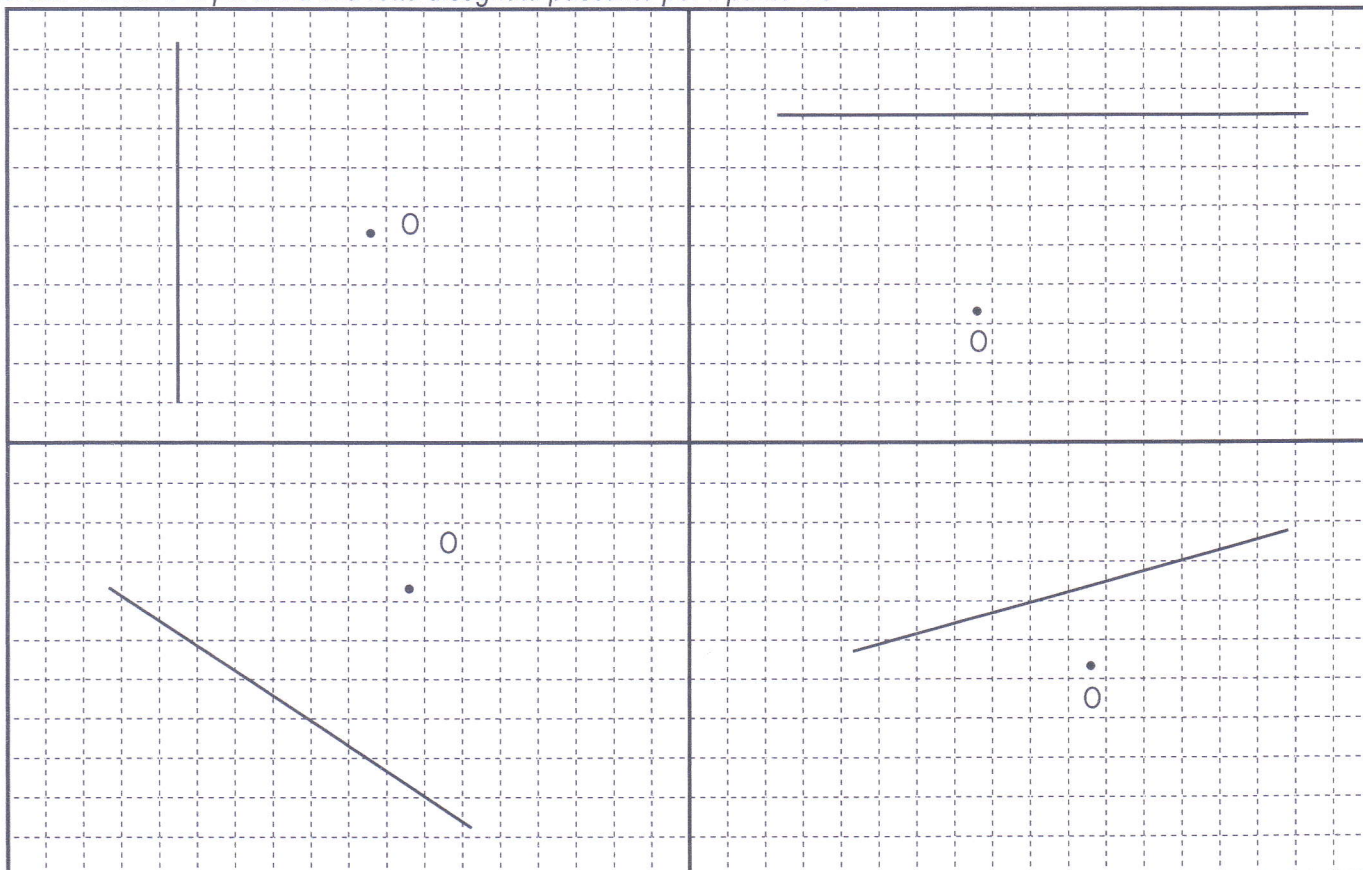


La squadra è uno strumento per disegnare, tracciare e progettare e ha la forma di triangolo rettangolo ed esiste in due varianti: squadra scalena, nella quale l'ipotenusa forma con i cateti un angolo di 30° e uno di 60° ; squadra isoscele, nella quale l'ipotenusa forma con i cateti due angoli di 45° . È spesso utilizzata assieme alla riga per tracciare segmenti perpendicolari o incidenti secondo gli angoli di uso corrente, rette parallele, verifiche di ortogonalità, ecc.

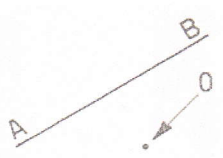
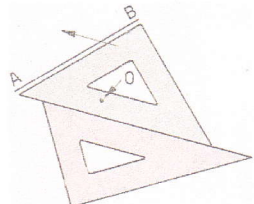
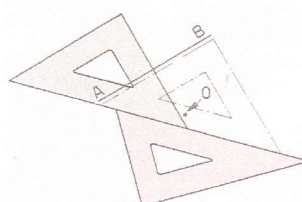
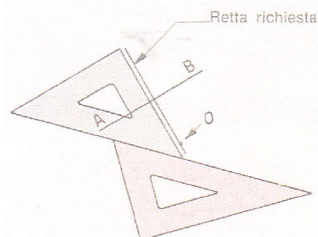
Tracciamento di linee parallele.

	Si debba tracciare per il punto O, una retta parallela al segmento AB.
	A questo scopo si dispongono due squadre, aderenti fra loro.
	Si devono mettere le due squadre in modo tale che un bordo di quella mobile coincida con il segmento dato come in figura. Con le dita della mano sinistra si tiene ben ferma la squadra guida e con la destra si sposta l'altra squadra finché lo stesso bordo di prima coincide col punto dato.
	Ora due dita della mano sinistra (indice e anulare) si spostano sopra la squadra mobile, la bloccano e con la destra si traccia con la matita la retta voluta.

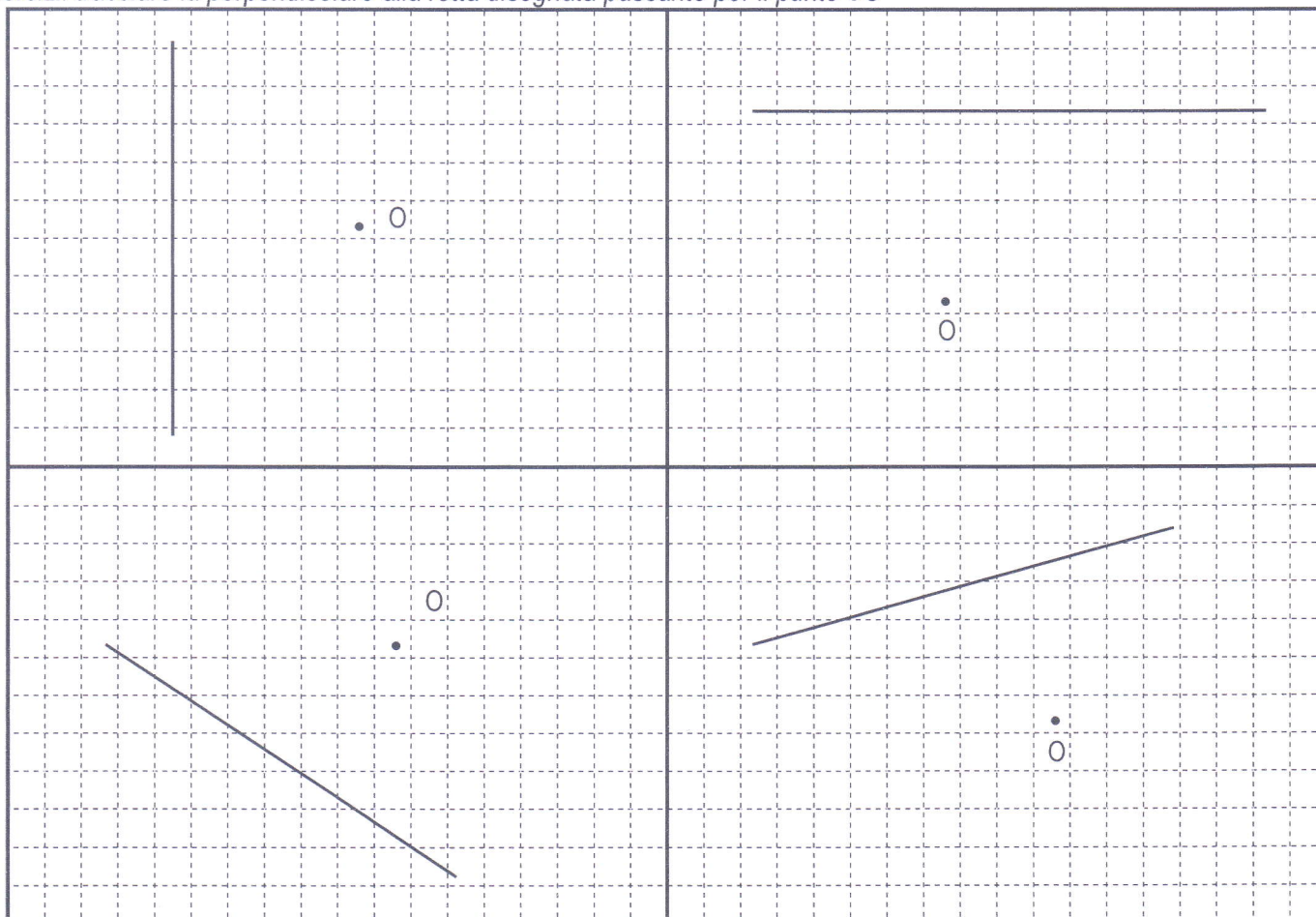
Esercizi: tracciare la parallela alla retta disegnata passante per il punto $\bullet O$



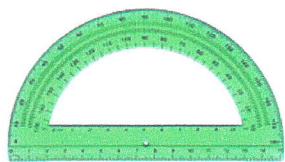
Tracciamento di linee perpendicolari.

	Si voglia tracciare per O una perpendicolare ad AB.
	La squadra guida è quella scalena mentre l'altra è quella isoscele. Si dispongono le due squadre aderenti tra loro, in modo che un bordo di quella mobile coincida con il segmento dato.
	Mentre con la mano sinistra si tiene ferma la squadra guida, con la mano destra si sposta l'altra squadra finché il bordo posto a 90° rispetto al precedente raggiunge il punto dato.
	Ora due dita della mano sinistra (indice e anulare) si spostano sopra la squadra mobile, la bloccano e con la destra si traccia con la matita la retta voluta.

Esercizi: tracciare la perpendicolare alla retta disegnata passante per il punto •O



Goniometro (strumento)



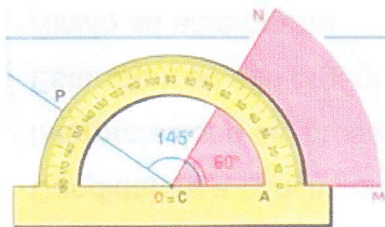
Goniometro 0-180 °

Un goniometro è uno strumento che ci permette di misurare un angolo o di costruire un angolo di una data misura. Non è uno strumento difficile da utilizzare, si può imparare facilmente.

Il goniometro, o disco goniometrico, misura l'ampiezza degli angoli sfruttando l'ampiezza fissa di un angolo giro, ossia l'angolo di un cerchio, ampio dunque 360° , attraverso una circonferenza graduata e un foro puntatore sul centro della stessa. In commercio è possibile trovare anche goniometri a metà, ossia a semicerchio, che sfruttano l'indicazione massima dell'angolo piatto. Normalmente questi goniometri dispongono di una scala sessagesimale ($0-180^\circ$ o $0-360^\circ$) con risoluzione di 1° .

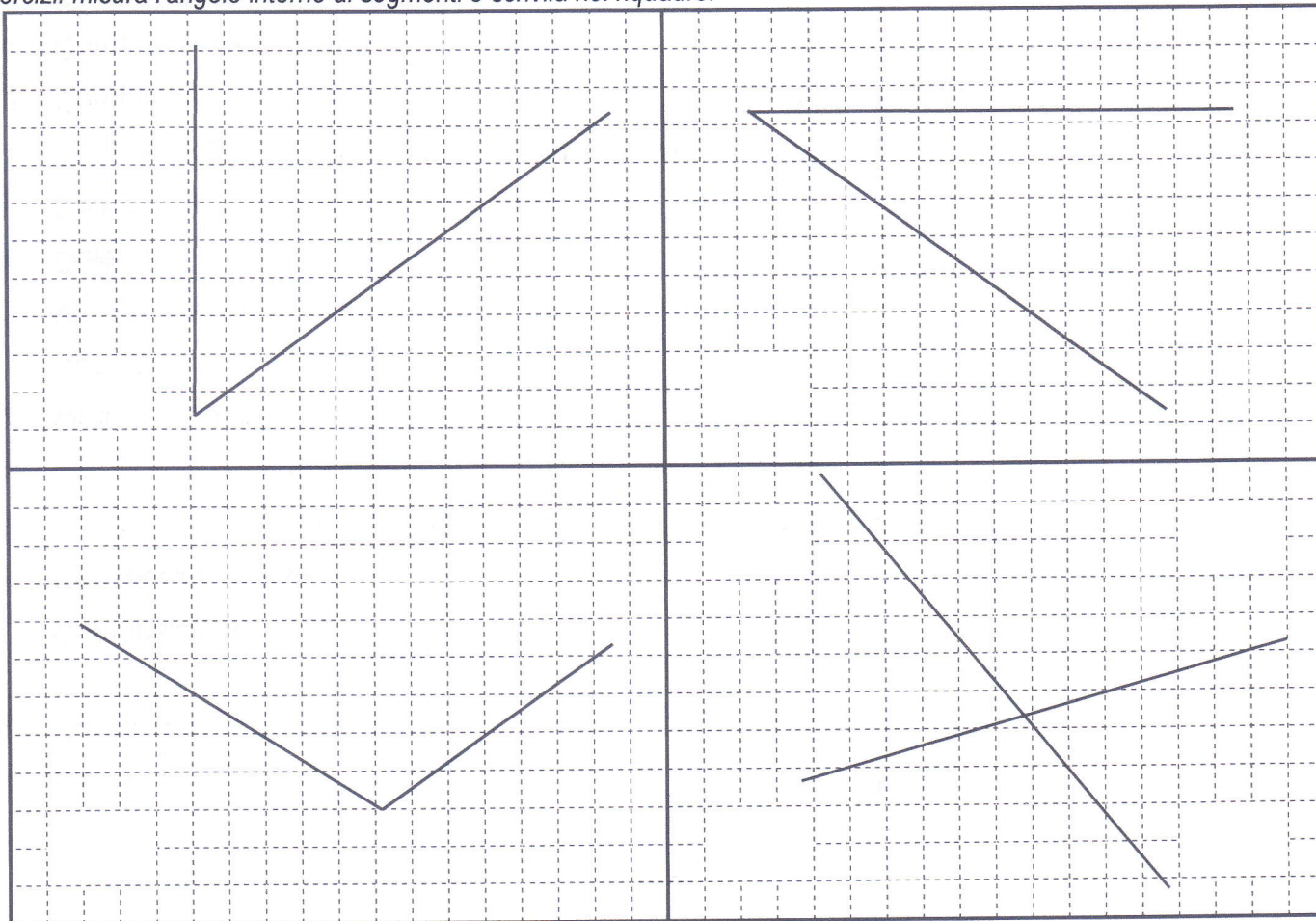
Utilizzare l'uno o l'altro non fa assolutamente differenza perché i principi da fruttare e le mosse da tenere presenti sono le stesse.

La misurazione dell'angolo.

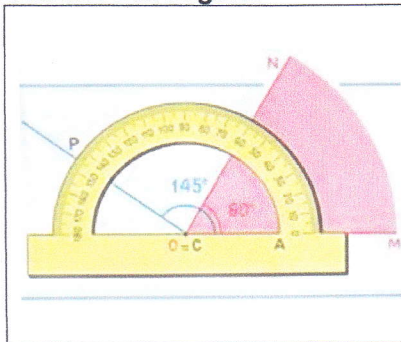


Per misurare un angolo già disegnato, invece, non dovete fare altro che posizionare la linea dell'angolo piatto (cioè come abbiamo detto il lato dritto del goniometro) con la base dell'angolo che volete misurare e guardate all'altezza di quale numero tracciato sul lato curvo del goniometro il secondo lato dell'angolo si interseca con lo strumento: quel numero corrisponde all'ampiezza dell'angolo, che dovrete ovviamente valutare in gradi. Adesso non vi resta che prendere nota dell'angolazione appena calcolata oppure di sfruttare questa informazione per proseguire con i vostri calcoli, misurazioni o realizzazioni di lavori differenti.

Esercizi: misura l'angolo interno ai segmenti e scrivila nel riquadro.

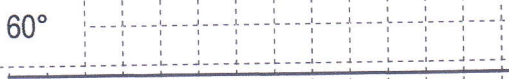
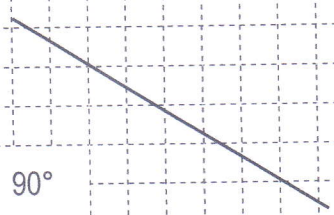
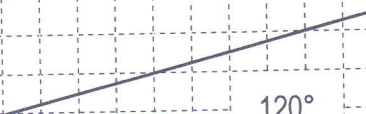


Costruzione dell'angolo.



Per disegnare o costruire un angolo con l'aiuto di un goniometro non dovete far altro che prendere lo strumento e tracciare una linea seguendo la base dritta dello strumento (cioè l'unico lato dritto e non curvo del goniometro). Quella linea rappresenta l'esatta metà di un cerchio, dunque un angolo di 180° , un angolo piatto insomma. La linea da voi tracciata (con matita o penna) rappresenterà un lato del triangolo. Tracciare l'altro lato darà vita all'angolo. Come? Prendete il goniometro e posizionate il foro del centro sul punto estremo della linea da voi appena tracciata. Adesso tracciate un segno accanto al numero impresso sul lato curvo del goniometro corrispondente all'ampiezza dell'angolo che volete realizzare.

Esercizi: disegna due segmenti uniti ad una estremità e con un angolo interno come riportato nel riquadro

 30°	 60°
 90°	 120°
 84°	 108°