Proprietà delle potenze in base 10

(a cura Prof.ssa E. Negri)

1. Potenze in base 10 con esponente intero positivo

Prendiamo un numero qualsiasi che denotiamo con la lettera *a* e un numero intero positivo che denotiamo con la lettera *n*. Per definizione (cioè per scelta nostra), il numero a^n (si legge "a alla enne") è quel numero che si ottiene moltiplicando per se stesso n volte il numero a, cioè:

$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots\ldots\cdot a$

Il numero a viene chiamato <u>base</u> mentre il numero n viene chiamato <u>esponente</u>.
Inoltre, sempre per definizione, si decide che un qualsiasi numero *a* elevato alla zero sia uguale a 1
esempi: $3^2 = 3 \cdot 3 = 9$ $4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ $7^0 = 1$
In particolare, se la base della potenza è il numero 10 otteniamo:
$10^0 = 1$
$10^1 = 10$
$10^2 = 100$
…
In generale: $10^n = 10000\ldots.0000$ *n zeri dopo l'1*
esempio: $10^6 = 1000000$

<u>Esercizi</u>**:**
Dati i seguenti numeri, se sono scritti in forma di potenza scriverli in forma decimale, se sono scritti in forma decimale scriverli in forma di potenza:

10^5 = ……… 10000 = ……… 10^8 = ……….. 10000000000 = ………………..

10^7 = ……… 1000000 = ………. 10^5 = ……….. 1000 = ……………….

2. Potenze in base 10 con esponente intero negativo

Prendiamo un numero qualsiasi che denotiamo con la lettera *a* e un numero intero positivo che denotiamo con la lettera *n*. Il numero (– n) sarà pertanto un numero intero negativo. Diamo di seguito la definizione della potenza: a^{-n} (si legge "a alla meno n").

<u>PER DEFINIZIONE</u>: $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

Esempi:

$$3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

$$(-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = \frac{1}{(-8)} = -\frac{1}{8}$$

In particolare, se la base della potenza è il numero 10 otteniamo:

$$10^{-1} = \frac{1}{10^1} = \frac{1}{10} = 0{,}1$$
$$10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 0{,}01$$
$$10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000} = 0{,}001$$
...

In base a quanto detto possiamo fare la seguente <u>osservazione</u>:

OSSERVAZIONE 1:

$$\frac{1}{10^{-n}} = \frac{1}{\frac{1}{10^n}} = 1 \cdot \frac{10^n}{1} = 10^n$$

esempio 1: $$\frac{1}{10^{-3}} = \frac{1}{\frac{1}{10^3}} = 1 \cdot \frac{10^3}{1} = 10^3$$

esempio 2: $$\frac{4}{10^{-5}} = \frac{4}{\frac{1}{10^5}} = 4 \cdot \frac{10^5}{1} = 4 \cdot 10^5$$

quindi una potenza con esponente negativo al denominatore equivale a una potenza con lo stesso esponente cambiato di segno (quindi positivo) al numeratore

OSSERVAZIONE 2:

Se la base di una potenza è un numero positivo, tale potenza sarà sempre un numero positivo, sia se l'esponente è positivo sia se l'esponente è negativo. Per esempio, se prendiamo coma base in numero positivo 2, $2^3 = 8$ (positivo) ma sarà anche positivo, per esempio, $2^{-4} = 1/2^4 = 1/16$. Se la base di una potenza è invece un numero negativo, allora tale potenza può essere sia positiva che negativa a seconda dell'esponente. Se quest'ultimo, indipendentemente dal segno è pari, allora il risultato della potenza sarà un numero positivo, se invece è dispari, sarà un numero negativo. Per esempio, se prendiamo coma base il numero negativo –2, $(-2)^4 = 16$, $(-2)^3 = -8$ (positivo), $(-2)^{-4} = 1/16$, $(-2)^{-5} = -1/32$.

<u>Esercizi</u>**:**

Dati i seguenti numeri, se sono scritti in forma di potenza scriverli in forma decimale, se sono scritti in forma decimale scriverli in forma di potenza in base 10:

0,000001 = ………	0,1 = …………	10^{-4} = ………..	$1/10^{-3}$ =…………
2^4 = ………..	4^{-3} = ……..………	-3^4 = ………..	0,00001 = ………
$-4/10^2$ = ……….	$3/10^{-2}$ = ………….	$-2/10^{-5}$ =…………	-10^{-3} = …………

3. Prodotto tra potenze in base 10

Facciamo subito degli esempi dai quali poi estrapoleremo la regola generale

- $10^2 \cdot 10^3 = (10 \cdot 10) \cdot (10 \cdot 10 \cdot 10) = 10^5$
  notare che l'esponente nel risultato finale (il 5) è uguale alla somma degli esponenti dei fattori iniziali (il 2 e il 3)

- $10^{-3} \cdot 10^4 = \frac{1}{10^3} \cdot 10^4 = \frac{10^4}{10^3} = 10^1$
  notare che l'esponente nel risultato finale (l'1) è uguale alla somma degli esponenti dei fattori iniziali (il – 3 e il 4)

- $10^2 \cdot 10^{-5} = 10^2 \cdot \frac{1}{10^5} = \frac{10^2}{10^5} = \frac{1}{10^3} = 10^{-3}$
  notare che l'esponente nel risultato finale (il –3) è uguale alla somma degli esponenti dei fattori iniziali (il 2 e il –5)
- $10^{-3} \cdot 10^{-2} = \frac{1}{10^3} \cdot \frac{1}{10^2} = \frac{1}{10^5} = 10^{-5}$
  notare che l'esponente nel risultato finale (il –5) è uguale alla somma degli esponenti dei fattori iniziali (il – 3 e il –2)

Regola generale:
il prodotto tra due potenze in base 10 è uguale alla potenza in base dieci avente come esponente la somma degli esponenti, cioè:

$\mathbf{10^n \cdot 10^m = 10^{n+m}}$ *(dove m e n possono essere sia positivi che negativi)*

Esercizi**:**
Eseguire i seguenti prodotti tra potenze in base 10, esprimendo il risultato sempre sotto forma di una potenza in base 10.

$10^3 \cdot 10^5 =$ ……… $10^{-2} \cdot 10^4 =$……… $10^2 \cdot 10^{-6} =$ ……….. $10^{-3} \cdot 10^{-4} =$ ………
$10^{-5} \cdot 10^2 =$……… $10^8 \cdot 10^{-7} =$ ……….

4. <u>Quoziente tra potenze in base 10</u>

Facciamo subito degli esempi dai quali poi estrapoleremo la regola generale

- $\frac{10^5}{10^2} = \frac{10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10}{10 \cdot 10} = 10^3$
  notare che l'esponente nel risultato finale (il 3) è uguale alla differenza tra l'esponente della potenza al numeratore (il 5) e l'esponente della potenza al denominatore (il 2)
- $\frac{10^2}{10^3} = \frac{10 \cdot 10}{10 \cdot 10 \cdot 10} = \frac{1}{10} = 10^{-1}$
  notare che l'esponente nel risultato finale (il –1) è uguale alla differenza tra l'esponente della potenza al numeratore (il 2) e l'esponente della potenza al denominatore (il 3). Infatti 2 – 3 = – 1
- $\frac{10^3}{10^{-4}} = \frac{10^3}{\frac{1}{10^4}} = 10^3 \cdot \frac{10^4}{1} = 10^7$
  notare che l'esponente nel risultato finale (il 7) è uguale alla differenza tra l'esponente della potenza al numeratore (il 3) e l'esponente della potenza al denominatore (il –4). Infatti 3 – (–4) = 3 + 4 = 7
- $\frac{10^{-2}}{10^5} = \frac{\frac{1}{10^2}}{10^5} = \frac{1}{10^2} \cdot \frac{1}{10^5} = \frac{1}{10^7} = 10^{-7}$
  notare che l'esponente nel risultato finale (il –7) è uguale alla differenza tra l'esponente della potenza al numeratore (il –2) e l'esponente della potenza al denominatore (il 5). Infatti – 2 – 5 = – 7
- $\frac{10^{-7}}{10^{-2}} = \frac{\frac{1}{10^7}}{\frac{1}{10^2}} = \frac{1}{10^7} \cdot \frac{10^2}{1} = \frac{1}{10^5} = 10^{-5}$
  notare che l'esponente nel risultato finale (il –5) è uguale alla differenza tra l'esponente della potenza al numeratore (il –7) e l'esponente della potenza al denominatore (il –2). Infatti –7 – (–2) = – 7 + 2 = –5

Regola generale:
il quoziente di due potenze in base 10 è una potenza in base 10 avente come esponente la differenza tra l'esponente della potenza che compare al numeratore e l'esponente della potenza al denominatore, cioè:

$\mathbf{10^n / 10^m = 10^{n-m}}$ *(dove m e n possono essere sia positivi che negativi)*

Esercizi**:**
Eseguire i seguenti rapporto tra potenze in base 10, esprimendo il risultato sempre sotto forma di una potenza in base 10.

$10^4 / 10^2 =$ …….. $10^{-2} / 10^{-3} =$ ………….. $10^5 / 10^{-2} =$ ………. $10^{-4} / 10^6 =$ …….

5. Potenza di una potenza in base 10

Facciamo subito degli esempi dai quali poi estrapoleremo la regola generale

- $(10^2)^3 = 10^6$

notare che l'esponente nel risultato finale (il 6) è uguale al prodotto tra l'esponente della potenza racchiusa tra parentesi (il 2) e l'esponente fuori della parentesi (il 3)

- $(10^{-2})^3 = \left(\frac{1}{10^2}\right)^3 = \frac{1^3}{(10^2)^3} = \frac{1}{10^6} = 10^{-6}$

  notare che l'esponente nel risultato finale (il –6) è uguale al prodotto tra l'esponente della potenza racchiusa tra parentesi (il –2) e l'esponente fuori della parentesi (il 3)

- $(10^3)^{-4} = \frac{1}{(10^3)^4} = \frac{1}{10^{12}} = 10^{-12}$

  notare che l'esponente nel risultato finale (il –12) è uguale al prodotto tra l'esponente della potenza racchiusa tra parentesi (il 3) e l'esponente fuori della parentesi (il –4)

- $(10^{-2})^{-5} = \frac{1}{(10^{-2})^5} = \frac{1}{\left(\frac{1}{10^2}\right)^5} = \frac{1}{\frac{1^5}{(10^2)^5}} = \frac{1}{\frac{1}{10^{10}}} = 1 \cdot \frac{10^{10}}{1} = 10^{10}$

  notare che l'esponente nel risultato finale (il 10) è uguale al prodotto tra l'esponente della potenza racchiusa tra parentesi (il –2) e l'esponente fuori della parentesi (il –5)

Regola generale:
la potenza di una potenza di base 10 è una potenza in base 10 avente come esponente il prodotto degli esponenti, cioè:

$\mathbf{(10^n)^m = 10^{n \cdot m}}$ *(dove n e m possono essere sia positivi che negativi)*

Esercizi**:**
Eseguire le seguenti potenze di potenze in base 10, esprimendo il risultato sempre sotto forma di una potenza in base 10.

$(10^4)^2 =$……… $(10^{-3})^3 =$………… $(10^2)^{-4} =$………….. $(10^{-6})^{-4} =$………