

Teorema di Pitagora e Triangoli speciali

(a cura prof.ssa M. Cola)

Il **triangolo rettangolo** è un triangolo molto particolare e studiato, se ne conoscono diverse proprietà e vi si applicano diversi teoremi.

Il **teorema di Pitagora** stabilisce la relazione fondamentale tra i lati di un triangolo rettangolo ed è una versione limitata ad essi del teorema di Carnot.

Enunciato

In un triangolo rettangolo, l'area del quadrato costruito sull'ipotenusa è pari alla somma dell'area dei quadrati costruiti sui cateti.

Dato un triangolo rettangolo di lati a , b e c , e indicando con c la sua ipotenusa e con a e b i suoi cateti, il teorema è espresso dall'equazione:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

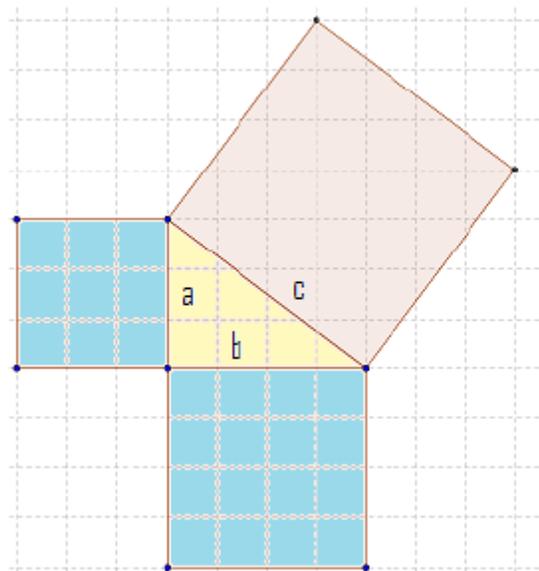
da cui risolvendo per l'ipotenusa c si ha

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

e da cui si ricavano i rispettivi cateti a e b

$$a = \sqrt{c^2 - b^2} \quad \text{e} \quad b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

Inversamente, ogni triangolo in cui i tre lati verificano questa proprietà è rettangolo.



Esempi di utilizzo di questa proprietà dei triangoli rettangoli

Noti i due cateti, ricercare l'ipotenusa

Sia dato un triangolo ABC rettangolo in A tale che AB sia 4 cm e AC sia 3 cm. La relazione di Pitagora consente di trovare il valore dell'ipotenusa:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25 \quad \text{da cui} \quad BC = \sqrt{25} = 5 \text{ cm}$$

Noti l'ipotenusa e un cateto, ricercare l'altro cateto

Sia dato un triangolo ABC rettangolo in A tale che AB sia 4 cm e BC sia 5 cm. La relazione di Pitagora consente di trovare il valore dell'ipotenusa:

$$AC^2 = BC^2 - AB^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9 \quad \text{da cui} \quad AC = \sqrt{9} = 3 \text{ cm}$$

Terne pitagoriche

Dati tre numeri **interi** a , b e c verificano la relazione $a^2 + b^2 = c^2$, si dice che questi formano una **terna pitagorica**. Le più "piccole" terne pitagoriche sono (3,4,5), (5,12,13), (6,8,10), (7,24,25), ma anche (6, 8, 10) e (10, 24, 26) sono terne pitagoriche, ottenute raddoppiando i termini delle prime due terne date.

Terne primitive e terne derivate

Una terna è **primitiva** quando è formata da numeri **primi fra loro**, il loro MCD è quindi 1 (MCD(3;4;5)=1). Esistono solo 16 terne pitagoriche primitive con il numero maggiore minore di 100. Le terne formate da numeri non primi tra di loro sono dette terne **derivate**. Le terne come quella formata (3, 4, 5) sono dette terne primitive e quelle come la (6, 8, 10) sono dette derivate.

Esercizi sul teorema di Pitagora

1. Calcola l'area, il perimetro e la diagonale di un rettangolo la cui dimensione minore misura 2,4 cm e la maggiore è i 4/3 della minore. soluzione
2. Un rettangolo ha la base che misura cm 6 e l'altezza è i 4/3 della base. Esegui il disegno in proporzione e determina l'area, il perimetro e la misura della diagonale della figura.
3. Un rettangolo ha la base di 36 cm e l'altezza che è i 4/9 della base. Determina l'area e il perimetro del triangolo formato dalla base, dall'altezza e dalla diagonale del rettangolo.
4. In un rettangolo la differenza delle lunghezze delle due dimensioni misura 5 cm e una è i 4/3 dell'altra. Calcola la lunghezza della diagonale e l'area del rettangolo.
5. Un rettangolo la somma e la differenza delle due dimensioni è di 49 cm e 21 cm. Sapendo che la l'altezza è i 2/5 della base, calcola il perimetro e la misura della diagonale della figura.
6. In un rettangolo la somma delle lunghezze delle due dimensioni misura 35 cm e una è i 4/3 dell'altra. Calcola la lunghezza della diagonale e l'area del rettangolo.
7. Un rettangolo ha l'altezza che misura cm 10 e la base è i 12/5 dell'altezza. Esegui il disegno in proporzione e determina l'area, il perimetro e la misura della diagonale della figura.
8. Calcola la lunghezza del perimetro, l'area di un rettangolo la cui diagonale misura 65 cm e l'altezza è 5/13 della diagonale.
9. Un rettangolo la somma e la differenza delle due dimensioni è di 42 cm e 6 cm. Sapendo che la l'altezza è i 3/4 della base, calcola il perimetro e la misura della diagonale della figura.
10. Il perimetro di un rettangolo è 230 cm e la base è gli 8/15 dell'altezza. Trova la misura della diagonale rettangolo.

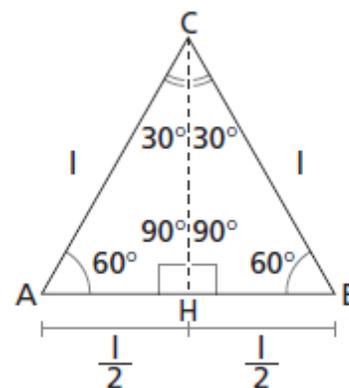
Triangolo Equilatero

Un triangolo equilatero ha tre lati uguali e tre angoli interni uguali (ciascuno di 60°). In un triangolo equilatero un'altezza (cioè un segmento condotto da un vertice e perpendicolare al lato opposto) è anche mediana (interseca il lato opposto nel punto medio) e bisettrice (divide l'angolo interno in due angoli uguali, di 30°).

Nella **figura** a lato la lunghezza del lato è $AB = AC = CB = l$; di conseguenza si ha $\overline{AH} = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{l}{2}$

Ciò permette di calcolare la lunghezza dell'altezza CH (e delle altre due, che sono uguali). Infatti, per il teorema di Pitagora si ha

$$\overline{CH} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{AH}^2} = \sqrt{l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \sqrt{l^2 - \frac{l^2}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}l^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}l$$

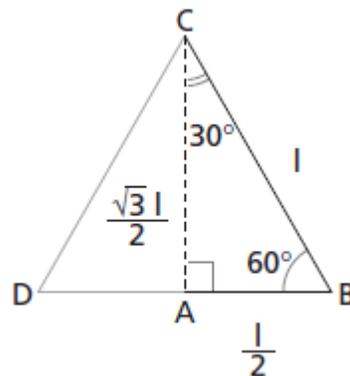


Triangolo Rettangolo con Angoli di 30° e 60°

Un triangolo rettangolo con un angolo di 30° e uno di 60° è la metà di un triangolo equilatero (figura a lato).

Se indichiamo con l la lunghezza dell'ipotenusa, valgono le seguenti proprietà:

- il cateto opposto all'angolo di 30° è lungo $\frac{l}{2}$
- il cateto opposto all'angolo di 60° è lungo $\frac{\sqrt{3}}{2}l$



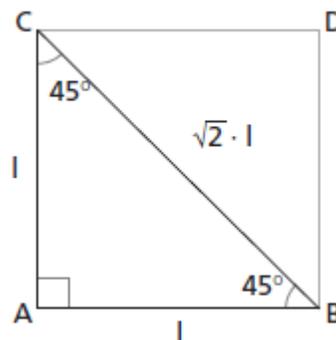
Triangolo Rettangolo Isoscele

Un triangolo rettangolo isoscele (cioè con i cateti uguali tra loro) è la metà di un quadrato (figura a lato) e ha due angoli di 45°.

Se indichiamo con l la lunghezza dei cateti, per il teorema di Pitagora l'ipotenusa risulta:

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{l^2 + l^2} = \sqrt{2l^2} = \sqrt{2}l$$

Nel triangolo rettangolo isoscele l'ipotenusa è uguale a un cateto moltiplicato per $\sqrt{2}$.



Esercizi

1 Vero o falso?

- a. Un triangolo rettangolo che è la metà di un triangolo equilatero ha due angoli uguali a 30°. **V F**
- b. In un triangolo rettangolo isoscele, l'ipotenusa è uguale a un cateto moltiplicato per $\sqrt{2}$. **V F**
- c. In un triangolo rettangolo con angoli di 30° e 60°, il cateto opposto all'angolo di 30° è lungo $\frac{\sqrt{3}}{2}l$, dove l è la lunghezza dell'ipotenusa. **V F**

2 Un triangolo rettangolo ha l'ipotenusa BC lunga 10 m e ha l'angolo $ABC = 30^\circ$. Quanto misurano i due cateti? $[AC = 5,0 \text{ m}; AB = 8,7 \text{ m}]$

3 La diagonale di un quadrato vale 8,5 cm. Quanto misura il lato del quadrato? $[6,0 \text{ cm}]$

4 Dividi a metà un triangolo equilatero con il lato di 13 cm. Traccia l'altezza relativa all'ipotenusa di uno dei due triangoli rettangoli ottenuti. Calcola la lunghezza dell'altezza. $[5,6 \text{ cm}]$